

Практикалық жұмыс 5

Қарапайым параллельді алгоритмдер. Monte Carlo әдісі арқылы азиаттық опцион бағасын модельдеу

Қаржы нарығында опциондар — бұл белгілі бір активті алдын ала белгіленген бағамен сатып алу немесе сату құқығын беретін қаржы құралдары. Опцион бағасын есептеу көптеген факторларға тәуелді, сондықтан оны нақты аналитикалық формуламен табу кейде қиынға соғады. Осындай жағдайларда *Monte Carlo әдісі* кеңінен қолданылады. Бұл әдіс кездейсоқ шамалар генерациясына негізделіп, ықтимал сценарийлердің көп санын модельдеу арқылы орташа мән мен сенімді интервалды анықтайды.

Опцион ұғымы және түрлері

Опцион — бұл инвесторға белгілі бір активті алдын ала белгіленген бағамен (страйк бағасы) сатып алу немесе сату құқығын беретін қаржылық келісімшарт.

Опциондардың негізгі екі түрі бар:

- **Call option** – активті сатып алу құқығын береді;
- **Put option** – активті сату құқығын береді.

Негізгі параметрлер:

- $S_0 = 100$; — бастапқы актив бағасы;
- $r = 0.03$; — тәуекелсіз пайыздық мөлшерлеме;
- $\sigma = 0.25$; — активтің құбылмалылығы (волатильдік);
- $T = 1.0$; — опционның мерзімі (жылмен);
- $M = 252$; — модельдеу уақыт қадамдарының саны (жыл ішіндегі сауда күндері санына сәйкес);
- $K = 100$; — опционның ереуіл бағасы;
- $isCall = true$; — егер true болса, бұл call-опцион екенін көрсетеді;
- $batch_size = 20000$; — бір итерацияда есептелетін модельдеу саны;
- $max_batches = 1e7$; — орындалуы мүмкін ең көп итерациялар саны.

Келесі айнымалылар статистикалық жинақтаулар үшін қажет: sumPayoff, sumPayoffSq, totalSims, batchCount — орташа мән мен дисперсияны есептеу үшін жиналған сомалар мен санауыштар.

tStart айнымалысы бағдарламаның жұмыс уақытын өлшеу үшін пайдаланылады. fprintf командалары арқылы экранға бастапқы ақпарат шығарылады.

Бағдарламаның негізгі бөлігі while циклінде орындалады. Бұл цикл берілген уақыт аяқталғанша немесе ең көп итерация санына жеткенше жалғасады. Әр айналым бір “пакет” модельдеуді орындайды.

Алдымен randn(M, batch_size) функциясы арқылы стандартты қалыпты үлестірілген кездейсоқ сандар матрицасы (Z) құрылады. Бұл мәндер актив бағасының кездейсоқ қозғалысын сипаттайды.

Содан кейін дрейф пен диффузия параметрлері есептеледі:

- $\text{drift} = (r - 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot dt;$
- $\text{diffusion} = \sigma \cdot \sqrt{dt};$

Бұл параметрлер актив бағасының логарифмдік өзгерісін анықтайды. cumsum функциясы арқылы уақыт бойынша жиналған логарифмдік баға есептеледі:

```
logS = log(S0) + cumsum(drift + diffusion .* Z, 1);
```

Содан кейін ол экспонента арқылы нақты баға шкаласына ауыстырылады:

```
S_paths = exp(logS);
```

Әрбір симуляция жолының бойындағы бағалардың арифметикалық орташа мәні табылады:

```
avgS = mean(S_paths, 1);
```

Осы орташа мәндер азиаттық опционның ерекшелігі болып табылады, себебі оның төлемі соңғы бағаға емес, уақыт бойынша орташа бағаға тәуелді.

Егер бұл call-опцион болса (isCall = true), төлем келесі түрде есептеледі:

```
payoff = max(avgS - K, 0);
```

яғни орташа баға ереуіл бағасынан жоғары болса, айырмасы төлем ретінде есепке алынады. Егер put-опцион болса, керісінше формула қолданылады:

```
payoff = max(K - avgS, 0);
```

Төлемнің ағымдағы құнын анықтау үшін дисконттау қолданылады:
$$\text{discounted} = \exp(-r \cdot T) * \text{payoff};$$

Бұл келешектегі төлемнің бүгінгі күнгі құнын есептейді.

Әрі қарай бағдарламаның статистикалық нәтижелері жаңартылып отырады.
sumPayoff және sumPayoffSq мәндері орташа мен дисперсияны есептеу үшін жиналады, ал totalSims жалпы модельдеу санын көрсетеді.

Осыдан кейін стандарттық қате (se) және 95% сенімділік интервалдары (ci95) есептеледі. Бұл бағалау нәтижесінің нақтылығын көрсетеді.

Әр цикл соңында экранға ағымдағы нәтижелер, орындалған модельдеу саны және қалған уақыт жөнінде мәлімет шығарылады.

pause(0.01); командасы MATLAB интерфейсін қатырып алмау үшін кішкене кідіріс енгізеді.

Барлық модельдеу аяқталған соң, бағдарлама жалпы орындалу уақыты мен соңғы нәтижені экранға шығарады:

- симуляция саны,
- модельдеу уақыты,
- соңғы бағалау мәні,
- стандарттық қате,
- 95% сенімділік аралығы.

Нәтижесінде бағдарлама азиаттық опционның әділ бағасын Monte Carlo тәсілімен табады. Бұл әдіс кездейсоқ сандар негізінде активтің ықтимал бағалық траекторияларын генерациялап, олардың орташа нәтижесін есептеу арқылы қолданылады.

Бұл жобада азиаттық опционның (яғни, бағасы активтің уақыт бойынша орташа мәніне байланысты болатын опцион түрі) бағасы Monte Carlo әдісімен есептеледі. Есептеу MATLAB бағдарламалау ортасында жүргізілді.

Есептің

мақсаты

Берілген параметрлер бойынша азиаттық опционның күтілетін бағасын

Monte Carlo модельдеу арқылы анықтау және оның сенімділік интервалын (95% CI) есептеу.

Міндеттері:

- Опционның математикалық және экономикалық мәнін ашу;
- Геометриялық Броундық қозғалыс моделін зерттеу;
- Monte Carlo әдісінің теориясын қарастыру;
- MATLAB бағдарламасында есептеу алгоритмін құру;
- Бағдарлама нәтижесін талдау және қорытынды шығару.

Код:

```
clear; close all; clc;
target_seconds = 3600;
rng(12345,'twister');
S0 = 100;
r = 0.03;
sigma = 0.25;
T = 1.0;
M = 252;
dt = T/M;
K = 100;
isCall = true;
batch_size = 20000;
max_batches = 1e7;
sumPayoff = 0;
sumPayoffSq = 0;
totalSims = 0;
batchCount = 0;

// Жаңа: нақты қай тіс-ті қолданатынымызды айқын етеміз
ticStart = tic;
fprintf('Monte Carlo start — target_seconds = %d s\n', target_seconds);
fprintf('Параметрлер: S0=%2f, K=%2f, r=%2f, sigma=%2f, T=%2f, M=%d\n', S0,K,r,sigma,T,M);

//Инициализация, егер цикл бірден аяқталса болмау үшін
meanEstimate = NaN;
se = NaN;
ci95 = [NaN, NaN];
while toc(ticStart) < target_seconds && batchCount < max_batches
    batchCount = batchCount + 1;
    t0 = tic;    // batch-ті бастау уақыты

    //Жолдар: M x batch_size
    Z = randn(M, batch_size);
    drift = (r - 0.5*sigma^2) * dt;
    diffusion = sigma * sqrt(dt);

    //log S жолдары (әр баған — бір сценарий)
    logS = log(S0) + cumsum(drift + diffusion .* Z, 1);
    S_paths = exp(logS);

    // Arithmetic average across time steps (row-wise mean gives 1 x batch_size)
    avgS = mean(S_paths, 1);
    if isCall
```

```

    payoff = max(avgS - K, 0);
else
    payoff = max(K - avgS, 0);
end

discounted = exp(-r*T) * payoff;
sumPayoff = sumPayoff + sum(discounted);
sumPayoffSq = sumPayoffSq + sum(discounted.^2);
totalSims = totalSims + batch_size;
t_batch = toc(t0);    //осы batch-тің уақыты
elapsed = toc(ticStart);    //жалпы өткен уақыт
meanEstimate = sumPayoff / totalSims;

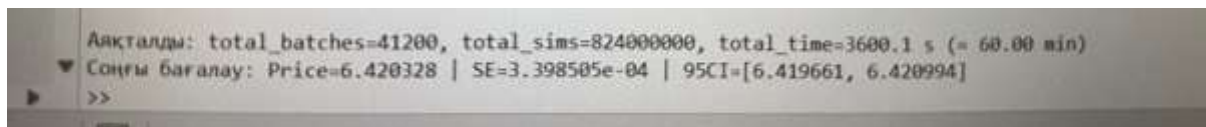
// Қауіпсіз вариант есептеу (сандық қателіктерге қарсы)
varEstimate = (sumPayoffSq / totalSims) - meanEstimate^2;
varEstimate = max(varEstimate, 0);
se = sqrt(varEstimate / totalSims);
ci95 = [meanEstimate - 1.96*se, meanEstimate + 1.96*se];
avg_batch_time = elapsed / batchCount;
remaining = max(0, target_seconds - elapsed);
est_remaining_batches = remaining / avg_batch_time;

fprintf('Batch %4d | sims=%8d | elapsed=%.1fs | batch_time=%.2fs | est_rem_batches=%.1f\n', ...
    batchCount, totalSims, elapsed, t_batch, est_remaining_batches);
fprintf(' Price=%.6f | SE=%.6e | 95CI=[%.6f, %.6f]\n', meanEstimate, se, ci95(1), ci95(2));

pause(0.01);
end
    total_time = toc(ticStart);
fprintf('\nАяқталды: total_batches=%d, total_sims=%d, total_time=%.1f s (≈ %.2f min)\n', ...
    batchCount, totalSims, total_time, total_time/60);
fprintf('Соңғы бағалау: Price=%.6f | SE=%.6e | 95CI=[%.6f, %.6f]\n', meanEstimate, se, ci95(1), ci95(2));

```

Нәтиже үлгісі:



Аяқталды: total_batches=41200, total_sims=824000000, total_time=3600.1 s (≈ 60.00 min)
 Соңғы бағалау: Price=6.420328 | SE=3.398505e-04 | 95CI=[6.419661, 6.420994]
 >>

Бағдарлама нәтижесінде әрбір партиядан кейін келесі мәліметтер экранға шығарылады:

- Орындау уақыты;
- Жалпы симуляциялар саны;
- Опцион бағасының ағымдағы мәні;
- Стандарттық қате (SE);
- 95% сенімділік интервалы.

Жұмыс барысында симуляция саны артқан сайын бағалау нәтижесі тұрақтанып, сенімділік интервалы тарылатыны байқалды. Бұл Monte Carlo әдісінің статистикалық қасиетін дәлелдейді.

Тапсырма: Жұмысты Param Bilim суперкомпьютерінде C++ тілінде орындаңыз.