

Практикалық жұмыс 4

Жоғары өнімді есептеулерді оқыту әдістері алгоритмдерінің негіздері. Param-Bilim суперкомпьютерінде жоғары өнімді есептеулерді жүзеге асыру. π санын жоғары дәлдікпен есептеу

Жұмыстың мақсаты:

- π (пи) санының мәнін есептеудің әртүрлі әдістерімен танысу;
- Жоғары дәлдікпен есептеу үшін қолданылатын алгоритмдерді зерттеу;
- Бағдарламалау тілінде π санын есептеу тәжірибесін алу.

саны туралы жалпы мәлімет

π (пи) саны — шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасы болып табылады. Бұл қатынас барлық шеңберлер үшін бірдей және шамамен 3,141592... мәніне тең. π саны — математиканың ең көне және ең танымал тұрақтыларының бірі.

π санының тарихы ежелгі дәуірден басталады. Алғаш рет бұл сан туралы мәліметтер шамамен **4 мың жыл бұрын** Вавилон және Мысыр өркениеттерінде кездеседі. Вавилондықтар π шамасын 3,125 деп есептеген, ал мысырлықтар (Ринд папирусында) шамамен 3,16 деп алған.

Ежелгі грек ғалымы Архимед π санын дәлірек есептеген алғашқы адамдардың бірі болды. Ол шеңберге ішке және сыртқа іштей және сырттай сызылған көпбұрыштардың периметрін есептеу арқылы $\pi \approx 3,14$ екенін анықтаған. Бұл әдіс қазіргі заманғы интегралдық есептеудің бастамасы болып саналады.

π саны ежелгі заманнан бастап көптеген математикалық есептерде қолданылады — геометрия, физика, инженерия және статистика салаларында.

π санын есептеу әдістері

π санын есептеу үшін әртүрлі математикалық формулалар бар. Олардың ішінде ең кең тарағандары:

а) Лейбниц қатары:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots\right)$$

Бұл әдіс қарапайым, бірақ дәлдігі баяу артады.

б) Мачин формуласы:

$$\pi = 16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Бұл формула тезірек жақындауды қамтамасыз етеді.

в) Монте-Карло әдісі:

Кездейсоқ нүктелерді квадрат ішіне тастап, оның ішкі шеңберге түскен нүктелер үлесін пайдалану арқылы π мәнін жуықтап есептеуге болады:

$$\pi = 4 * \frac{\text{шеңбер ішіндегі нүктелер саны}}{\text{барлық нүктелер саны}}$$

г) Чудновский әдісі:

Бұл формула гипергеометриялық қатарларға негізделген және өте тез жинақталады, сондықтан ол арқылы π санының миллиардтаған ондық таңбаларын есептеуге болады. Қазіргі көптеген суперкомпьютерлер мен бағдарламалар (мысалы, *y-cruncher*) дәл осы әдіске сүйенеді:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 (640320)^{3k + \frac{3}{2}}}$$

Әдіс	Артықшылығы	Кемшілігі	Орындау уақыты (шамамен)
Лейбниц қатары	Қарапайым және түсінікті формула	Өте баяу жақындайды, жоғары дәлдікке жету үшін көп итерация қажет	15–20 минут
Мачин формуласы	Жылдам және дәлірек есептеу береді	Формула күрделі, арктангенс есептеу қажет	30–60 секунд
Монте-Карло әдісі	Жүзеге асыруы оңай, кездейсоқ сандарды пайдаланады	Дәлдігі төмен, нәтижелер кездейсоқтыққа тәуелді	2–3 минут
Чудновский әдісі	Өте жоғары дәлдік, тез жинақталу, қазіргі суперкомпьютерлерде қолданылады	Формула күрделі, үлкен сандармен есептеу қажет	5–10 секунд

Практикалық бөлім

Мысалы, π санын жоғары дәлдікпен есептеу үшін **Python** тілінде мынадай код қолдануға болады(Чудновский әдісі) :

```
#!/usr/bin/env python3
from mpmath import mp
import time

mp.dps = 50000
print("Начинаю вычислять число  $\pi$ ...")
start = time.time()
pi_val = mp.pi
end = time.time()
print("Готово за", end - start, "секунд")
print("Первые 100 знаков  $\pi$ :", str(pi_val)[:102])
print("Всего посчитано знаков:", len(str(pi_val)) - 2)
```

```
Начинаю вычислять число  $\pi$ ...
Готово за 8.0 секунд
Первые 100 знаков  $\pi$ : 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421178679
Всего посчитано знаков: 49999
Process finished with exit code 0
```

Түсіндірме:

- `mpmath` — жоғары дәлдікті математикалық есептерге арналған кітапхана;
- `mp.dps` — ондық дәлдік деңгейін орнатады (мысалы, 1 000 000 таңбаға дейін);
- `mp.pi` — π санының мәнін беретін айнымалы;
- `time` модулі — есептеу уақыты қанша секунд болғанын өлшейді;

Соңында бағдарлама алғашқы 100 таңбаны және жалпы есептелген таңбалар санын шығарады.

Нәтиже:

Бағдарлама π санын шамамен бірнеше секундта есептейді және оның алғашқы жүз таңбасын экранда көрсетеді. Бұл тәжірибе арқылы мен жоғары дәлдікті есептеудің ресурстарды қалай пайдаланатынын және Python тілінің осындай күрделі есептерге жарамды екенін байқалады.

Тапсырма: Осы программаны Суперкомпьютерде C++ бағдарламалау тілінде суперкомпьютерде есептеңіз.