

13 -Дәріс

Таырыбы: Матрицаны-векторға көбейту, декомпозиция әдістері

Жоспар

1. Матрицаны-векторға жол бойынша бөліп көбейту
2. Матрицаны жол бойынша тікбұрышты фрагменттерге бөлу

әдісі

Мақсаты: білім алушыларды матрицаны векторға көбейту, декомпозиция әдістерімен таныстыру

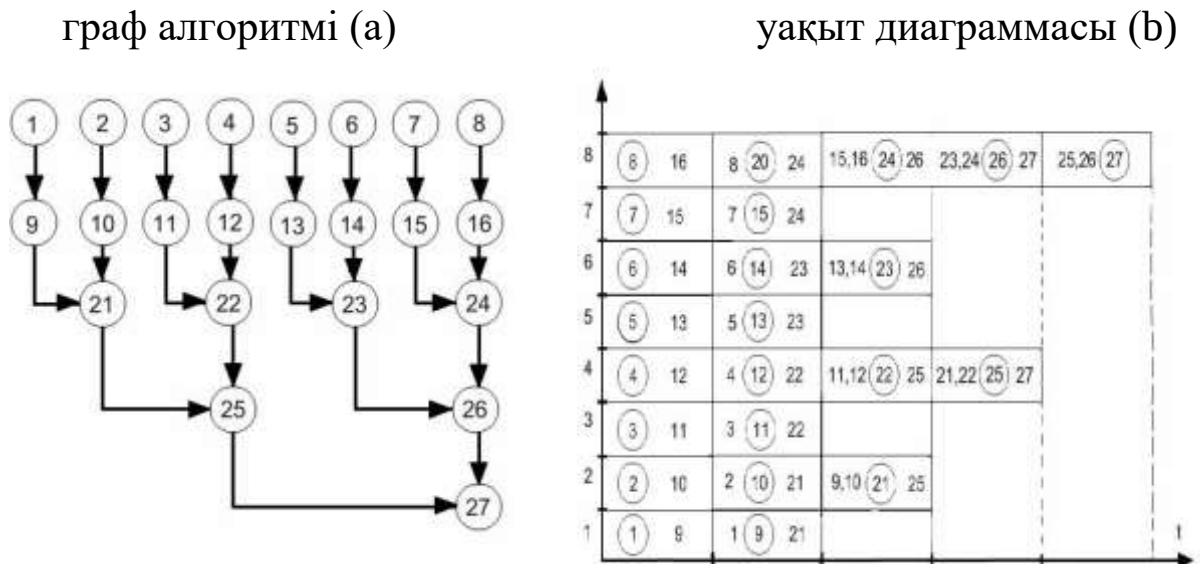
Кілттік сөздер: орындалу уақыты, жылдамдату, эффективтілік, есептеу құны

Оқытудың әдістемесі мен формасы: Баяндау, дәріс

Матрицаны векторға көбейту операциясы әртүрлі есептерде жиі кездеседі. Сондықтан көптеген стандартты бағдарламалар кітапханаларында матрицалық операцияларды орындау үшін арнайы процедуралар бар. Дегенмен, оларды параллельдеудің негізгі схемаларын түсіну қажет. Себебі, біріншіден, ол белгілі бір стандартты топтамалардан берілген топологиямен жүйені ең дұрыс параллельдеуді таңдап алу үшін қажетті ақпаратты ұсынады. Екіншіден, матрицалық операциялар - есептерді параллель есептеу арқылы шешудің көптеген әдістерін көрсету үшін классикалық мысалы бола алады. Әрі қарай, жалпыға бірдей, матрицаның тығыздығы, яғни олардағы нөлдік элементтер саны матрицалық элементтердің жалпы санымен салыстырғанда аз болады.

Матрицаны 33-суретте көрсетілгендей, векторға көбейту есебін параллельдеу кезінде, әдетте, декомпозицияның екі түрі қолданылады,

1. Таспа түрінде бөлу - көлденең немесе тігінен жолақтарға.
2. Деректерді тікбұрышты фрагменттерге бөлу (блоктап бөлу).



Сурет 34- Матрицаны жолдар бойынша бөлудегі
граф алгоритмі (а) және уақыт диаграммасы (б)[9]

Таспа түрінде бөлу кезінде әр процессорға жолдар немесе бағандардың кейбір саны белгіленіп бөлінеді. Бұл жағдайда матрицаны горизонтальды түрде бөлу әдісі мына түрді көрсетіледі.

$$A = (A_0, A_1, \dots, A_{s-1})^T, A_i = (a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{ik-1}), \quad (1)$$

$$ij = ik + j, \quad 0 \leq j < k, \quad k = \frac{m}{s}, \quad (2)$$

мұндағы $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), 0 \leq i \leq m$ А матрицасының i -нші жолы (алдын-ала жол саны $m = k \cdot s$ процессорлар санынан қалдықсыз бөліну қажет)

Кейбір жағдайда процессорларды арнайы топология үшін теңдестіру (балансировка) тұрғысынан жолдар немесе бағандардың цикл түрде ауысуының артықшылығы болады. Бұл жағдайда

$$ij = i + js, \quad 0 \leq j < k, \quad k = \frac{m}{s} \quad (3)$$

33 суретте 8 процессорде матрицаны векторге көбейтуді жол бойынша таспа түрінде бөлу әдісінің граф алгоритмінің уақытша диаграммасы көрсетілген. Мұнда 1-8 цифрлары арқылы деректерді енгізу амалдары, ал 9-16 цифрлары арқылы әр процессорға вектордың тағайындалған көбейту амалдары белгіленген.

Осы операциялардың нәтижесінде әрбір процессорда қажетті вектордың $1/8$ бөлігі алынады. Сандар 21-27 «жинақтау» операциялары белгіленген. Жинақтау үш сатымен жүзеге асырылады. Алғашқы қадамнан кейін (21-24 амалдарды орындау) 4 процессорда бұл қажетті вектордың $1/4$ бөлігі пайда болады.

Келесі қадамда (25-26 амалдары) екі процессорда қажетті вектордың $1/2$ бөлігі пайда болады. Соңғы 3-ші қадамда, 27-амалды орындау нәтижесінде, вектордың қорытынды нәтижесі алынатын болады. Ал матрицаны векторға көбейтуді баған бойынша таспа түрінде бөлу әдісі айтарлықтай ерекшеленеді.

1. Матрицаны жол бойынша тікбұрышты фрагменттерге бөлу әдісі

Блоктық декомпозициялауда матрица әдетте қатар тұрған элементтерден тұратын тікбұрышты фрагменттерге бөлінеді. Егер процессор саны $s=p \cdot q$, матрицаның жол саны p -ға қалдықсыз бөлінсе, бағандар саны – q ($m=k \cdot p$, $n=l \cdot q$), болса, онда матрицаны тікбұрышты блоктар түрінде келесі жолмен көрсетуге болады:

$$A = \begin{pmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \dots & A(1,q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(p,1) & A(p,2) & \dots & A(p,q) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Мұндағы $A(i, j)$ келесі элементтерден тұратын матрицаның блогы

$$A(i, j) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kl} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Блоктап бөлу үшін p жолдар мен q бағандарының торы түріндегі жүйелік топологиясы ұсынылады. Тордың құрамындағы іргелес процессорлары бастапқы матрицаның іргелес блоктарын өңдейтіндей етіп ұйымдастыру қажет. Блок-схема үшін де жолдар мен бағандардың циклмен ауысып тұруы қолданылады.

2. Матрицаны-векторға жол бойынша бөліп көбейту

Бұл жағдайда $m \times n$ матрицасын $n \times 1$ векторымен көбейту n ұзындықтағы векторларының m скалярлық көбейтіндісін есептеуге әкеледі. Әр осындай көбейту n көбейту операцияларымен $n-1$ қосу

амалдарынан тұрады. Осылайша, тізбектей алгоритмның есептеу күрделілігі $T_1=m(2n-1)$, ал $n*n$ квадратты матрица болса $T_1=n(2n-1)$ формуласымен есептеледі.

Егер $n*n$ квадратты матрицасын көбейту параллель орындалса, онда әр процессорге бірден артық емес жол бекітіледі.

$$m_s = \lceil n * s \rceil \quad (6)$$

Мұндағы $\lceil \cdot \rceil$ – үлкен жаққа дейін бүтін бөлікке дөңгелектеу операциясы. m_s дан кем емес процессорлар саны тағайындалады. Жол саны нақты n және s мәндерімен анықталады.

Есептеу және байланыс шығындарын есепке ала отырып, жеделдету және эффектілікті бағалауды үшін, барлық $(2n-1)$ көбейту және қосу амалдары τ бірдей ұзындықта болады. Ал есептеу жүйесі біртекті болады, яғни барлық процессорлар бірдей өнімділікте болады. Онда (6) формуласын есепке ала отырып параллель алгоритмының уақытша шығыны келесі формуламен есептеледі.

$$T_s = \lceil \frac{n}{s} \rceil [(2n - 1) * \tau] \quad (7)$$

Егер деректерді жіберу желісі гиперкуб немесе толық граф құрылымда болса, онда деректерді жинақтау $\lceil \log_2 s \rceil$ итерациясымен орындалады. Бірінші итерацияда процессорлардың байланысқан жұбы $w(n|s)$ көлемді хабарламамен алмасады, мұндағы w -вектордың бір элементінің байттық өлшемі. Екінші итерацияда бұл көлем екі есе көбейеді де теңеседі. Деректерді жинау жалпы уақыты

$$T_s = \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 s \rceil} \left(\frac{\alpha + 2^{i-1} \omega}{\beta} \right) \lceil \frac{n}{s} \rceil = \alpha \lceil \log_2 s \rceil + \omega \lceil \frac{n}{s} \rceil \left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_2 s \rceil} 2^{i-1} \right) / \beta \quad (8)$$

Мұндағы α – деректерді жіберу кідірісі, β – желінің өткізу қабілеттілігі. Осы формуланы мына түрде де көрсетілуге болады

$$\sum_{i=1}^{\lceil \log_2 s \rceil} 2^{i-1} = (2^{\lceil \log_2 s \rceil} - 1) = s - 1 \quad (9)$$

(7), (8) және (9) формулаларын есепке алып параллель алгоритмді орындаудың жалпы уақыты

$$T_s = \left\lceil \frac{n}{s} \right\rceil [(2n-1) * \tau + \alpha] \log_2 s + w \left\lceil \frac{n}{s} \right\rceil (s-1)/\beta \quad (10)$$

Егер n/s және $\log_2 s$ бүтін сандар болса, онда (10) сәйкес жеделдету және эффективтілік көрсеткіштері мына келесі түрге келеді.

$$R = \frac{T_1}{T_s} = \frac{n(2n-1)\tau}{\left\lceil \frac{n}{s} \right\rceil [(2n-1) * \tau + \alpha] \log_2 s + w \left\lceil \frac{n}{s} \right\rceil (s-1)/\beta} \quad (11)$$

$$E_s = \frac{R}{s} = \frac{n(2n-1)\tau}{n(2n-1)\tau + s \left\{ \alpha \log_2 s + \frac{w \left\lceil \frac{n}{s} \right\rceil (s-1)}{\beta} \right\}} \quad (12)$$

Байланыстардан (12) пайдаланылатын процессорлар санының артуымен қажетті тиімділік деңгейін ұстап тұру үшін, есептің есептеу күрделілігі де (матрицаның өлшемдері және векторы) тиісінше өсуі керек. Сондай-ақ (11,12) деректерді беру шығындарын елемеусіз қалдырсақ, формула келесі түрге (13,14) келеді:

$$R = T_1/T_2 = s \quad (13)$$

$$E_s = R/s = 1 \quad (14)$$

Есептің ішкі жоғарғы параллелизмі, берілген жағдайда параллельдеуге болмайтын операциялардың жоқтығына байланысты [19].

Тапсырма:

Матрицаны баған бойынша бөлудегі граф алгоритмін салып көрсетіңіз.

Бақылау сұрақтары

1. Матрицаны баған бойынша бөлу мен жол бойынша бөлудің айырмашылығын атаңыз?
2. Декомпозиция дегеніміз не?

