

13 дәріс

Дәріс тақырыбы: Орнықтылық теориясы жөнінде негізгі түсініктер.
Анықтамалар. Есеп қою мәселесі

Жоспар

1. Орнықтылық теориясы жөнінде негізгі түсініктер. Есеп қою мәселесі
2. Ляпунов бойынша орнықтылық. Негізгі анықтамалар.
3. Тұрақты коэффициентті 2-ретті сызықтық теңдеулер жүйесін орнықтылыққа зерттеу.

2. Ляпунов бойынша орнықтылық. Негізгі анықтамалар.

Мысал 1: $\frac{dx}{dt} = ax;$ (12)

теңдеуінің шешімі a тұрақты сан болғанда орнықты, ал $a \leq 0$ болғанда асимптотикалық түрде орнықты, $a > 0$ болғанда орнықсыз.

Себебі, (12) теңдеудің $x(t_0) = x_0$ шартын қанағаттандыратын шешімі

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)} \quad (13)$$

Бұл $a \leq 0$ және $t \geq t_0$ болғанда $e^{a(t-t_0)} \leq 1$;

Сондықтан $t \geq t_0$ болғанда $|x| = |x_0| e^{a(t-t_0)} < \varepsilon$, егер $|x_0| < \varepsilon$ болса

Ал $a < 0$ болғанда $e^{a(t-t_0)} \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ кез келген x_0 үшін $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$,

ал $a > 0$ болғанда орнықсыз, себебі $|x_0|$ қандай аз шама болса да (13) шешім $|x(t)| < \varepsilon$ қанағаттандырмайды.

3. Тұрақты коэффициентті 2-ретті сызықтық теңдеулер жүйесін орнықтылыққа зерттеу

(19)

Мысал 2: Мына төмендегі жүйелерді орнықтылыққа зертте?

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - y; \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y; \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \lambda_{1,2} = 2 \pm i;$$

Сипаттаушы теңдеу түбірлері комплекстік сандар, оның нақты бөлігі оң таңбалы болғандықтан қозғалыс ($x=y=0$ шешімі)-орнықты фокус.

Мысал 3:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 4y; \\ \frac{dy}{dt} &= x - y; \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i - \text{орнықты центр.}$$

Мысал 4: a және b -ның мәндеріне байланысты орнықтылыққа зерттеп, тыныштық қалпының ($x=y=0$) қандай болатынын көрсетіндер?

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= -a^2x - 2by; \end{aligned}$$

Нүктенің сипаттаушы теңдеуі

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & -2b-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{aligned} \lambda^2 + 2b\lambda + a^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}; \end{aligned}$$

1°. Егер $b=0$ болса, онда $\lambda_{1,2} = \pm ai$;

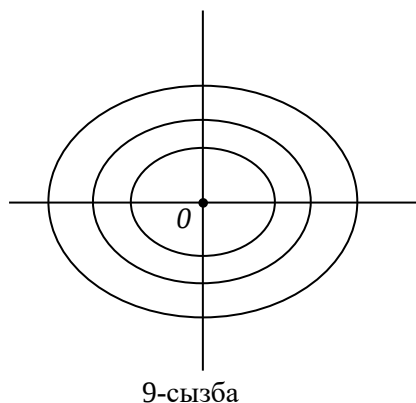
Матрицаның өзіндік саны немесе сипаттаушы теңдеудің түбірі таза жорамал сан болғандықтан, тыныштық қалпы ($x=y=0$ нольдік шешімі) орнықты центр.

2°. $b^2 - a^2 < 0, b > 0$ -орнықты фокус.

3°. $b^2 - a^2 \geq 0, b > 0$ -орнықты түйін.

4°. $b^2 - a^2 < 0, b < 0$ -орнықты фокус.

5°. $b^2 - a^2 \geq 0, b < 0$ -орнықты түйін.



9-сызба

4) 2) – мысалда берілген жүйе қозғалысының орнықты центр болатынын көрсеткен едік, енді центрді (бас нүктені) қоршап тұрған қисықтың түрін анықтайық. (9-сызба)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-4y}{x-y} \quad \text{қатынасын алайық, немесе}$$

$$(x-y)dx - (x-4y)dy = 0.$$

$$\text{Бұл} \quad \frac{\partial(x-y)}{\partial y} = \frac{\partial[-(x-4y)]}{\partial x} = -1 \quad \text{болғандықтан}$$

толық дифференциалды теңдеу.

$$F(x, y) = \int (x - y) dx + \overbrace{\varphi(y)}^C = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'(y); -x + \varphi'(y) = -x + 4y \Rightarrow \varphi(y) = 2y^2;$$

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + 2y^2 = C_1; x^2 - 2xy + 4y^2 = 2C_1 = C;$$

$$(x - y)^2 + 3y^2 = (\sqrt{C})^2 - \text{эллипстер тобы.}$$

Проинтегрировать неоднородные линейные системы, с постоянными коэффициентами.

$$817. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x. \end{cases}$$

$$819. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x + \cos t. \end{cases}$$

$$818. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2t. \end{cases}$$

$$820. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - e^t. \end{cases}$$

Өз бетімен шығаруға есептер

$$821. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + t, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$823. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = t^2, \\ \frac{dy}{dt} - x = t. \end{cases}$$

$$825. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 2z + 2 - t, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z + 1 - t. \end{cases}$$

$$822. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x + e^t, & x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$824. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \\ 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t. \end{cases}$$

$$826. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + 2y = 2e^{-t}, & x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} + y + z = 1, & y(0) = 1, \\ \frac{dz}{dt} + z = 1, & z(0) = 1. \end{cases}$$

1151-1156 есептерінде еркін тұрақтылардың өзгеру әдісімен теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін табыңыз және бастапқы қойылған шарттарға сәйкес келетін шешімді таңдаңыз.

$$1151. y_1' = y_1 + y_2 - x^2 + x - 2, y_2' = -2y_1 + 4y_2 + 2x^2 - 4x - 7; y_1 = 0, y_2 = 2 \\ x = 0.$$

$$1152. \begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases} \quad 1153. \begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x, \\ z' = 3y - 2z + 4e^x. \end{cases}$$

$$1154. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4 \cos 2t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8 \cos 2t + 5 \sin 2t. \end{cases}$$

$$1155. \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t; x=1, y=-2 \quad t=0.$$

$$1156. y' = 2y + 4z + \cos x, z' = -y - 2z + \sin x.$$

1157-1159 есептерінде анықталмаған коэффициенттер әдісімен жеке шешімін табу және жалпы шешім құру.

$$1157. y' = -y + z - 2e^{-x}, z' = -6y + 4z - 4e^{-x}; y_1 = ae^{-x}, z_1 = be^{-x}.$$

$$1158. y' = 2y + z - 4, z' = y + 2z + 3x - 6; y_1 = ax + b, z_1 = cx + d.$$

1159.

$$y' = 2y - z - \sin x, z' = 3y - 2z - \cos x; y_1 = a \cos x + b \sin x,$$

$$z_1 = c \cos x + d \sin x.$$

1160-1164 есептерінде теңдеулер жүйесін Д'Алембер әдісімен интегралдау

$$1160. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad 1161. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$1162. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases} \quad 1163. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5y + 4z + e^x, \\ \frac{dz}{dt} = 4y + 5z + 1. \end{cases}$$

$$1164. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$$

1165-1167 есептерінде теңдеулер жүйесінің тәуелсіз интегралдарын табыңыз.

$$1165. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases} \quad 1166. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - z, \\ \frac{dy}{dt} = y + 2z. \end{cases}$$

$$1167. \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2y - z} = \frac{dz}{y + 2z}.$$

1168-1183 есептерінде теңдеулер жүйесі үшін Коши ($t_0 = 0$) түрінде жалпы шешімді, осы жүйемен анықталған қозғалыс траекториясын табыңыз, суретте t уақыты өскен кезде қозғалыс бағытын көрсетіңіз және нөлдік шешімнің тұрақтылығын зерттеңіз.

$$1168. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad 1169. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

$$1170. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases} \quad 1171. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

$$1172. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases} \quad 1173. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$1174. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases} \quad 1175. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$1176. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases} \quad 1177. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$$

$$1178. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \quad 1179. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$1180. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases} \quad 1181. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

$$1182. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

$$1183. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

1184-1193 есептерінде жүйенің сипаттамалық сандарының түріне сәйкес теңдеулер жүйесімен анықталған нөлдік шешімнің тұрақтылығын зерттеңіз.

$$1184. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$1185. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x. \end{cases}$$

$$1186. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$1187. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$$

$$1188. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 9x - 4y. \end{cases}$$

$$1189. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$1190. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$1191. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

$$1192. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2y, \\ \frac{dz}{dt} = -3z. \end{cases}$$

$$1193. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -12x + 5y + 12z, \\ \frac{dz}{dt} = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$$

Дифференциалдық теңдеулер және оның жүйесін Ляпунов анықтамасы бойынша орнықтылыққа зерттеңіз

$$882. \frac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) = 1.$$

$$883. \frac{dx}{dt} = 2t(x + 1), \quad x(0) = 0.$$

$$884. \frac{dx}{dt} = -x + t^2, \quad x(1) = 1.$$

$$885. \frac{dx}{dt} = 2 + t, \quad x(0) = 1.$$

$$886. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 13y, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$887. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 9y, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін $(0,0)$ тыныштық нүктесінің характерін анықтаулар

$$888. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$$

$$889. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$890. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

$$891. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$$

$$892. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

$$893. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$894. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 3y. \end{cases}$$

895. При каких значениях α точка покоя $(0, 0)$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

устойчива?

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Байарыстанов А.О. Дифференциалдық теңдеулер және қатарлар теориясы мен есептері : оқулық / А.О. Байарыстанов, Б.Д. Қошанов. - Алматы : Альманахъ, 2022. - 209, [1] б. : сур. - Библиогр.: б. 209. - ISBN 978-601-7670-

54 https://library.enu.kz:443/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=176283&idb

2. Егоров, Д. Л. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Д. Л. Егоров. — Казань : Издательство КНИТУ, 2020. — 108 с. — ISBN 978-5-7882-2911-9. <https://datalib.ru/catalog/books/120982>

3. Алдай М

Жәй дифференциалдық теңдеулерге кіріспе : / М. Алдай, Қ.Р. Мырзатаева. - Алматы : Эверо, 2021. - 207, [1] б. - Библиогр.: б. 165. -

ISBN

978-601-310-780-5.

https://library.enu.kz:443/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=153603&idb=0

5. Киселёв, В. Ю. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений : учебное пособие / В. Ю. Киселёв, Т. Ф. Калугина. — Иваново : ИГЭУ, 2023. — 152 с. <https://e.lanbook.com/book/369719>

6. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-9441-5. <https://e.lanbook.com/book/195426>

7. Шестакова, Е. Г. Дифференциальные уравнения первого порядка : по дисциплине «Дифференциальные уравнения» / Е. Г. Шестакова. — Тверь : Тверской государственный университет, 2021. — 38 с. <https://www.iprbookshop.ru/130362.html>

Косымша

8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - Ижевск, 2000. - 176 с. - ISBN 5-93972-008-1. <https://kvm.gubkin.ru/pub/uok/FilippovDU.pdf>

9. Асташова И.В. Дифференциальные уравнения: Конспект лекций. – Москва, 2012. http://new.math.msu.su/diffur/main_du_ast.pdf

10. Феофанова В.А., Воротников В.И. Дифференциальные уравнения: лекции, примеры, задачи. – Нижний Тагил: НТИ УрФУ, 2015. https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/36042/1/feofanova_vorotnikov_2015.pdf