

12 дәріс

Дәріс тақырыбы: Тұрақты коэффициентті біртекті сызықты жүйелер

Жоспар

1. n - ретті біртекті емес теңдеудің оң жағы бойынша дербес шешімі және шешу әдістері. Практикада қолдану схемасы.
2. Сызықтық жүйелер. Нормаль жүйелер. Тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық жүйелердің жалпы шешімі Эйлер әдісін қолданып табу
3. Белгісізді шығару және Эйлер әдістерін қолданып жүйені шешу жолдары.

)

1-мысал:

$$\frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 2y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -4y_1 - y_2$$

Жүйенің дербес шешулері $y_1 = a_1 e^{\lambda_1 x}$; $y_2 = a_2 e^{\lambda_2 x}$. Осыны теңдеуге қойып, меншікті векторларды табу үшін алгебралық жүйе аламыз

$$(5 - \lambda)a_1 + 2a_2 = 0$$

$$-4a_1 + (-1 - \lambda)a_2 = 0$$

Матрицаның меншікті мәндері

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

теңдеуінен табылады. Олар $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$; Шешімдер тобы:

$\lambda_1 = 1$ сәйкес

$$4a_1 + 2a_2 = 0$$

$$-4a_1 - 2a_2 = 0$$

$$a_2 = -2a_1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -2$$

$$y_{11} = e^x; y_{12} = -2e^x;$$

$\lambda_1 = 3$ сәйкес

$$2a_1 + 2a_2 = 0$$

$$-4a_1 - 4a_2 = 0$$

$$a_1 = -a_2$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1$$

$$y_{21} = e^{3x}; y_{22} = -e^{3x};$$

Алынған дербес шешулердің жүйе шешуінің фундаменталдық жүйесі болатынын анықтау қажет, ол орындалу үшін $W(x) \neq 0$ болуы керек.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & -2e^x \\ e^{3x} & -e^{3x} \end{vmatrix} = -e^{4x} + 2e^{4x} = e^{4x} \neq 0$$

Демек жалпы шешімі

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

$$y_2 = -2C_1 e^x - C_2 e^{3x};$$

2) Егер λ өзіндік мәні k еселік болып $m(m < k)$ сызықтық тәуелсіз өзіндік векторлары болса, онда λ - ға сәйкес шешімді $(k - m)$ дәрежелі векторлық көпмүшеліктің $e^{\lambda x}$ - ке көбейтіндісін алу керек:

$$y = (a_1 + a_2 x + \dots + a_{K-m} x^{K-m}) e^{\lambda x}$$

Мысалы:

$$\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2;$$

Сипаттаушы теңдеудің түбірлерін табайық

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2;$$

Берілген жүйенің шешімін

$$y_1 = a_1 e^{2x}; y_2 = a_2 e^{2x}$$

түрінде іздейміз, бұл шешулер сызықты тәуелсіз шешулер бола алмайды, сондықтан басқа бір шешулер іздеу керек.

$$(3 - \lambda)a_1 + a_2 = 0$$

$$-1 \cdot a_1 + (1 - \lambda)a_2 = 0$$

λ_1 - ге сәйкес $a_1 + a_2 = 0$ бұдан $a_1 = 1, a_2 = -1$

$y_1 = e^{2x}; y_2 = -e^{2x}$; осы шешумен сызықты тәуелсіз болатын шешім , сипаттауыш теңдеу түбірі еселік болғандықтан

$y_2 = (a_1 + a_2 x)e^{2x}; y_2 = (a_3 + a_4 x)e^{2x}$ түрінде ізделеді. Осы екінші шешімдерді берілген теңдеуге қойсақ,

$$a_2 + 2(a_1 + a_2 x) = 3(a_1 + a_2 x) + a_3 + a_4 x;$$

$$a_4 + 2(a_3 + a_4 x) = -a_1 - a_2 x + a_3 + a_4 x;$$

Бұл теңдеулерден

$$a_1 - a_4 + a_3 = 0 \quad a_2 + a_4 = 0$$

Осыдан

$a_1 = 1, a_3 = -1; a_2 = a_4 = 0$ және $a_1 = 1; a_3 = 0; a_2 = 1; a_4 = 1$; Сондықтан

$y_1 = e^{2x}; y_2 = -e^{2x}$; және $y_1 = (1 + x)e^{2x}, y_2 = -xe^{2x}$; екі сызықты тәуелсіз шешімдер аламыз.

Демек берілген жүйенің жалпы шешімі

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 (1+x) e^{2x}$$

$$y_2 = -C_1 e^{2x} - C_2 x e^{2x};$$

3) Егер A матрицасының меншікті сандары арасында комплекстік сандар болса, онда A матрицасы нақты болған жағдайда, жүйенің комплекстік шешімінен $\lambda = \alpha \pm \beta i (\beta \neq 0)$ санына сәйкес екі сызықты тәуелсіз нақты шешім бөлініп алынады.

Мысалы:

$$\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 2y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 - y_2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0; \lambda_{1,2} = 2 \pm i;$$

$\lambda_1 = 2 - i$ түбірлеріне сәйкес комплекстік түрдегі шешімі

$y_1 = a_1 e^{\lambda_1 x}; y_2 = a_2 e^{\lambda_1 x};$ мұнда a_1, a_2 -векторлар да комплекстік сандар. a_1, a_2 сандарын $(3-\lambda)a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow (1+i)a_1 + 2a_2 = 0$

теңдеуінен табамыз, олар $a_1 = 1-i; a_2 = -1;$

Сондықтан

$$y_1 = e^{2x}[(\cos x - \sin x) - i(\cos x + \sin x)] \quad y_{21} = -e^{2x} \cos x;$$

$$y_2 = e^{2x}(\cos x - i \sin x) \quad \downarrow \quad y_{21} = -e^{2x} \cos x; \quad y_{22} = -e^{2x} \sin x;$$

$$y_{22} = e^{2x} \sin x;$$

Сонымен жүйенің екі заттық шешімі табылды. Жалпы шешім:

$$y_1 = e^{2x}[(C_1 - C_2)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x]$$

$$y_2 = -e^{2x}(C_1 \cos x - C_2 \sin x);$$

1. Белгісізді шығару және Эйлер әдістерін қолданып жүйені шешу жолдары.

I. Белгісізді шығару әдісі:

Бұл әдіспен теңдеулер жүйесін бір белгісізі бар жоғарғы ретті теңдеуге келтіріп шығаруға болады. Әдіс қиын емес теңдеулер жүйесін шығаруға қолайлы.

1. Мысал. Жүйенің шешімін табу керек:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = x + 1. \end{cases}$$

Шешуі: Жүйенің бірінші теңдеуінен

$$y = \dot{x} - 1, \quad (*)$$

осыдан туынды аламыз $\dot{y} = \ddot{x}$, жүйенің екінші теңдеуіне қойып, $\ddot{x} = x + 1$ тұрақты коэффициентті екінші ретті теңдеу аламыз. Біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Біртекті теңдеудің шешімі $x_{\text{б.м.}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Дербес шешімін іздейміз $f(t) = 1, \gamma = 0, s = 0$, онда

$$x_{\text{д.м.}}(t) = A, \quad \ddot{x}_{\text{д.м.}}(t) = 0 \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1.$$

Сонымен $x_{\text{д.м.}}(t) = -1$.

Жалпы шешімі $x(t) = x_{\text{б.м.}}(t) + x_{\text{д.м.}}(t) \Rightarrow x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1$. Осыдан

$\dot{x} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$, оны (*)-ға қойып, $y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1$ аламыз.

$$\text{Жауабы: } x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1, \quad y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$$

II. Эйлер әдісі.

2. Мысал. Жүйенің шешімін табыңыздар

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Шешуі: 1) Сипаттамалық теңдеуін құрамыз:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

бұдан

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3.$$

2) Өзіндік векторларды анықтаймыз:

$\lambda = 3$ болғанда, өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер

$$\begin{cases} -4\alpha + 8\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases},$$

түрінде болады. Бұдан $\alpha = 2\beta$, оның шешімінің біреуі (2;1) – өзіндік вектор,

$$\text{осыдан } \begin{cases} x_1 = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} = 2C_1 e^{3t} \\ y_1 = C_1 e^{3t}. \end{cases}$$

$\lambda = -3$ болғанда өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер

$$\begin{cases} 2\alpha + 8\beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

түрінде болады. Бұдан $\alpha = -4\beta$, оның бір шешімі (-4;1) – өзіндік вектор,

$$\text{осыдан } \begin{cases} x_2 = -4C_2 e^{-3t} \\ y_2 = C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

3) Жүйенің жалпы шешімі:

$$\begin{cases} x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t} \\ y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} \end{cases}.$$

3. Мысал. Жүйенің шешімін табыңыз:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Шешімі: 1) Сипаттамалық теңдеуден өзіндік мәндерді табамыз:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

осыдан

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i,$$

үшінші жағдай.

2) Өзіндік векторларды анықтаймыз.

$\lambda = 1 + 3i$ болғанда, өзіндік векторларды анықтайтын теңдеулер

$$\begin{cases} -3i\alpha - 3\beta = 0 \\ 3\alpha - 3i\beta = 0 \end{cases},$$

түрінде болады, осыдан $\alpha = i\beta$, оның бір шешімі $(1; -i)$ – өзіндік вектор.

Жүйенің фундаментальды шешімі

$$x = e^{(1+3i)t} = e^t (\cos 3t + i \sin 3t)$$

$$y = -ie^{(1+3i)t} = -ie^t (\cos 3t + i \sin 3t) = -e^t (i \cos 3t - \sin 3t),$$

және

$$x_1 = \operatorname{Re} x = e^t \cos 3t \quad \text{және} \quad x_2 = \operatorname{Im} x = e^t \sin 3t$$

$$y_1 = \operatorname{Re} y = e^t \sin 3t \quad y_2 = \operatorname{Im} y = -e^t \cos 3t,$$

онда

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t \\ y = C_1 e^t \sin 3t - C_2 e^t \cos 3t \end{cases}$$

$\lambda = 1 - 3i$ - түйіндес санға сәйкес шешім $\alpha + \beta i$ түбірімен сәйкес келеді.

$$\text{Жауабы: } \begin{cases} x = C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t \\ y = C_1 e^t \sin 3t - C_2 e^t \cos 3t. \end{cases}$$

4. Мысал. Жүйенің шешімін табу керек

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$$

(**)

Шешімі. 1) Сипаттамалық теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (***)$$

осыдан

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3, \quad k = 2$$

еселі түбірлер.

2) Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар санын табамыз:

$\lambda = 3$ болғанда, (***) теңдеуден

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицасын аламыз, оның реті $n=2$, ранг $r=1$.

Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар саны $m = n - r = 1$.

$\lambda = 3$ түбірі еселігі $k = 2$, яғни $k > m$, онда шешімді $k - m = 1$ ретті көпмүшеліктің $e^{\lambda t}$ көбейтіндісі ретінде қарастырамыз, яғни

$$\begin{cases} x = (a + bt)e^{3t} \\ y = (c + dt)e^{3t}, \end{cases}$$

және

$$\begin{aligned} \dot{x} &= be^{3t} + 3(a + bt)e^{3t} \\ \dot{y} &= de^{3t} + 3(c + dt)e^{3t} \end{aligned};$$

(**) жүйеге қойып,

$$\begin{cases} b + 3a + 3bt = 2(a + bt) + c + dt \\ d + 3c + 3dt = 4(c + dt) - a - bt \end{cases}$$

сәйкес коэффициенттерін теңестіре отырып,

бірінші теңдеуден

$$t : 3b = 2b + d$$

$$t^0 : b + 3a = 2a + c,$$

екінші теңдеуден

$$t : 3d = 4d - b$$

$$t^0 : d + 3c = 4c - a$$

аламыз. Осыдан

$b = d$, $b = C_2$, $a = C_1$ белгілесек, онда $d = C_2$, $c = C_1 + C_2$.

3) Берілген жүйенің жалпы шешімі:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$$

$$y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}.$$

Нормаль түріне келтірілмеген

$$\begin{cases} a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \dots + a_{1n} + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \dots + b_{1n}y = 0, \\ a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \dots + a_{2n} + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \dots + b_{2n}y = 0, \end{cases}$$

жүйесін шешу үшін келесі сипаттамалық теңдеуді құрамыз

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \dots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \dots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \dots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \dots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

Теңдеудің түбірлерін табамыз. Шешімді алдыңғы есептей жазамыз.

5. Мысал. Жүйенің шешімін табу керек:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

Шешуі. Сипаттамалық теңдеуін құрамыз

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 2 & 3 \\ -1 & \lambda^2 + 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Бұдан $(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 2) + 3 \Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$.

$\lambda = \pm 1$ болғанда, өзіндік векторларды табамыз

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3\beta \Rightarrow (3,1).$$

Шешім:
$$\begin{cases} x_1 = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} \\ y_1 = C_1e^t + C_2e^{-t}. \end{cases}$$

$\lambda_{3,4} = \pm i$ болғанда, өзіндік векторларды табамыз

$$\begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow (1,1).$$

Шешім:
$$\begin{cases} x_2 = C_3 \cos t + C_4 \sin t \\ y_2 = C_3 \cos t + C_4 \sin t. \end{cases}$$

Жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{cases} x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t. \end{cases}$$

Методом Эйлера найти общее решение данных систем и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$804. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$806. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

$$808. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \quad x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

$$810. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$805. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$$

$$807. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \quad x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 2x, \quad y(0) = -1. \end{cases}$$

$$809. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$$

$$811. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \quad x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \quad y(0) = 0, \\ \frac{dz}{dt} = y - 2z - 3x, \quad z(0) = 1. \end{cases}$$

Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение следующих линейных неоднородных систем:

$$812. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$$

$$814. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \frac{dy}{dt} = \operatorname{tg} t - x. \end{cases}$$

$$816. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

$$813. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

$$815. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Байарыстанов А.О. Дифференциалдық теңдеулер және қатарлар теориясы мен есептері : оқулық / А.О. Байарыстанов, Б.Д. Қошанов. - Алматы : Альманахъ, 2022. - 209, [1] б. : сур. - Библиогр.: б. 209. - ISBN 978-601-7670-544-5 https://library.enu.kz:443/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=176283&idb

2. Егоров, Д. Л. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Д. Л. Егоров. — Казань : Издательство КНИТУ, 2020. — 108 с. — ISBN 978-5-7882-2911-9. <https://datalib.ru/catalog/books/120982>

3. Алдай М

Жэй дифференциалдық тендеулерге кіріспе : / М. Алдай, Қ.Р. Мырзатаева. - Алматы : Эверо, 2021. - 207, [1] б. - Библиогр.: б. 165. - ISBN 978-601-310-780-5.

https://library.enu.kz:443/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=153603&idb=0

5. Киселёв, В. Ю. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений : учебное пособие / В. Ю. Киселёв, Т. Ф. Калугина. — Иваново : ИГЭУ, 2023. — 152 с. <https://e.lanbook.com/book/369719>

6. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-9441-5. <https://e.lanbook.com/book/195426>

7. Шестакова, Е. Г. Дифференциальные уравнения первого порядка : по дисциплине «Дифференциальные уравнения» / Е. Г. Шестакова. — Тверь : Тверской государственный университет, 2021. — 38 с. <https://www.iprbookshop.ru/130362.html>

Қосымша

8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - Ижевск, 2000. - 176 с. - ISBN 5-93972-008-1. <https://kvm.gubkin.ru/pub/uok/FilippovDU.pdf>

9. Астахова И.В. Дифференциальные уравнения: Конспект лекций. — Москва, 2012. http://new.math.msu.su/diffur/main_du_ast.pdf

10. Феофанова В.А., Воротников В.И. Дифференциальные уравнения: лекции, примеры, задачи. — Нижний Тагил: НТИ УрФУ, 2015. https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/36042/1/feofanova_vorotnikov_2015.pdf