

5 дәріс

Дәріс тақырыбы: Коши есебі шешуінің бар болуымен жалғыздығы жөніндегі мәселелер

Тапсырма 1. $y = \frac{c^2 - x^2}{2x}$ функциясының $x + y + x \cdot y' = 0$ теңдеудің шешімі болатындығын, болмайтындығын тексеріңіз.

Шешуі.

Функцияның туындысын табамыз:

$$y' = \left(\frac{c^2 - x^2}{2x} \right)' = \left(\frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \right)' = -\frac{c^2}{2x^2} - \frac{1}{2}.$$

Берілген теңдеуге y және y' мәндерін қоямыз:

$$x + \frac{c^2 - x^2}{2x} + x \cdot \left(-\frac{c^2}{2x^2} - \frac{1}{2} \right) = 0; \quad x + \frac{c^2}{2x} - \frac{x}{2} - \frac{c^2}{2x} - \frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Жауабы: берілген функция теңдеудің шешімі болады.

Тапсырма 2. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y^3.$$

Шешуі.

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y^3 \Rightarrow dy = x^3 y^3 dx \quad - \quad \text{айнымалылары ажыратылатын теңдеу.}$$

$$dy = x^3 y^3 dx \quad / : y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = x^3 dx \quad - \quad \text{айнымалылары ажыратылған теңдеу.}$$

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^3 dx; \quad \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^4}{4} + c; \quad -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\text{Жауабы: } -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^4}{4} + c \quad - \quad \text{теңдеудің жалпы интегралы.}$$

Тапсырма 3. Коши есебін шешіп, интегралдық қисықты сызыңыз:
 $y' = 6y, \quad y(0) = 5.$

Шешуі.

$y' = 6y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6y \Rightarrow dy = 6y dx$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

$\frac{dy}{y} = 6dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int 6dx; \quad \ln|y| = 6x + c; \quad |y| = e^{6x+c}$ – теңдеудің жалпы шешімі.

Бастапқы шарттарды қолданамыз: $|5| = e^{6 \cdot 0 + c}; \quad 5 = e^c; \quad C = \ln 3;$
 $y = e^{6x + \ln 3}; \quad y = e^{6x} \cdot e^{\ln 3}; \quad y = 3e^{6x}$ – бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешім.

Жауабы: $y = 3e^{6x}.$

Тапсырма 4. Коши есебін шешіңіз: $y' = -5y^2, \quad y(0) = \frac{1}{5}.$

Шешуі.

$y' = -5y^2; \quad \frac{dy}{dx} = -5y^2; \quad dy = -5y^2 dx$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

y^2 – қа бөлеміз: $\frac{dy}{y^2} = -5x; \quad \int \frac{dy}{y^2} = -5 \cdot \int dx; \quad y = \frac{1}{5x + c}$ – теңдеудің жалпы шешімі.

Бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімді іздейміз:

$$y(0) = \frac{1}{5}; \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \cdot 0 + c}; \quad c = 5.$$

Ескерту. y^2 – қа бөлгенде $y^2 = 0$ немесе $y = 0$ шешімін жоғалтуымыз мүмкін. Теңдеуге қою арқылы $y = 0$ осы теңдеудің шешімі екендігіне көз жеткіземіз. Сонымен қатар, $y = 0$ теңдеудің жалпы шешіміне кірмейтіндіктен, ерекше шешімі болады.

Жауабы: $y = \frac{1}{5x + 5}, \quad y = 0.$

4-тапсырма. Коши есебін шешіңіз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
4.1	$y' = y^2, y(0) = 1$	4.2	$y' = y^2, y(0) = -1$
4.3	$y' = y^2, y(0) = 0$	4.4	$y' = y^2, y(1) = 2$
4.5	$y' = y^2, y(-1) = 2$	4.6	$y' = y^2, y(1) = -3$
4.7	$y' = y^2, y(-1) = -4$	4.8	$y' = -y^2, y(0) = 1$
4.9	$y' = -y^2, y(0) = -2$	4.10	$y' = -y^2, y(2) = 5$
4.11	$y' = -y^2, y(2) = -3$	4.12	$y' = -y^2, y(-1) = 4$
4.13	$y' = 2y^2, y(0) = 3$	4.14	$y' = -3y^2, y(0) = -1$
4.15	$y' = y^3, y(0) = 2$	4.16	$y' = -y^3, y(0) = 4$
4.17	$y' = \frac{1}{y^2}, y(1) = 1$	4.18	$y' = \frac{1}{y^2}, y(0) = -1$
4.19	$y' = 1 + y^2, y(0) = 0$	4.20	$y' = 4 + y^2, y(1) = 0$
4.21	$y' = y^2 - 1, y(0) = 1$	4.22	$y' = y^2 - 1, y(0) = 2$
4.23	$y' = y^2 - 1, y(0) = -2$	4.24	$y' = 1 - y^2, y(0) = -1$
4.25	$y' = 1 - y^2, y(0) = 2$	4.26	$y' = \frac{y}{1 - y^2}, y(0) = 1$
4.27	$y' = 3y^2, y(0) = 1$	4.28	$y' = \frac{1}{y}, y(0) = -2$
4.29	$y' = \frac{3y}{4 - y^2}, y(0) = 1$	4.30	$y' = \frac{3y}{4 - y}, y(0) = 1$

5-тапсырма. Коши есебін шешіңіз.

№	Тапсырма	№	Тапсырма
5.1	$y' - \frac{y}{x} = x^3, y(1) = 0$	5.2	$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x}, y(4) = 2$
5.3	$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, y(1) = 1$	5.4	$y' + \frac{y}{x} = x, y(-1) = 1$
5.5	$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}, y(4) = -1$	5.6	$y' + \frac{y}{x} = e^x, y(1) = 0$
5.7	$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{1+x^2}, y(1) = 0$	5.8	$y' - 2xy = e^{x^2}, x, y(0) = -1$
5.9	$y' - 2xy = e^{x^2}, x, y(-1) = 2$	5.10	$y' + 2xy = e^{-x^2}, y(1) = 2$
5.11	$y' + 2xy = x, y(0) = 1$	5.12	$y' + 2xy = 2x, y(0) = -2$
5.13	$y' + \frac{y}{x} = \cos x, y(\pi) = 0$	5.14	$y' - \frac{y}{x} = \ln x, y(e) = 1$
5.15	$y' - \frac{2y}{x} = x, y(1) = 1$	5.16	$y' - \frac{2y}{x} = 1, y(2) = -2$
5.17	$y' - \frac{2y}{x} = \sqrt[3]{x}, y(8) = -1$	5.18	$y' + \frac{2y}{x} = \sqrt{x}, y(4) = 0$
5.19	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos 2x}{x^2}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	5.20	$y' - 2xy = -x, y(0) = -1$
5.21	$y' - \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x}, y(8) = 1$	5.22	$y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x, y(1) = 1$
5.23	$y' - 2xy = x, y(0) = 1$	5.24	$y' - 2xy = x^2 e^{x^2}, y(1) = 2$
5.25	$y' + 2xy = x e^{-x^2}, y(0) = 2$	5.26	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, y(1) = 1$
5.27	$y' - y \cos x = \sin 2x, y(0) = -1$	5.28	$y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}$
5.29	$y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1$	5.30	$y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Алматы, 1996.
2. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-9441-53. <https://e.lanbook.com/book/195426>
3. Алдай М. Жәй дифференциалдық теңдеулерге кіріспе : / М. Алдай, Қ.Р. Мырзатаева. - Алматы : Эверо, 2021. - 207, [1] б. - Библиогр.: б. 165. - ISBN 978-601-310-780-5. https://library.enu.kz:443/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=153603&idb=0

4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - Ижевск, 2000. - 176 с. - ISBN 5-93972-008-1.
<https://kvm.gubkin.ru/pub/uok/FilippovDU.pdf>

Қосымша

7. Феофанова В.А., Воротников В.И. Дифференциальные уравнения: лекции, примеры, задачи. – Нижний Тагил: НТИ УрФУ, 2015.
https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/36042/1/feofanova_vorotnikov_2015.pdf
8. Асташова И.В. Дифференциальные уравнения: Конспект лекций. – Москва, 2012. http://new.math.msu.su/diffur/main_du_ast.pdf
9. Феофанова В.А., Воротников В.И. Дифференциальные уравнения: лекции, примеры, задачи. – Нижний Тагил: НТИ УрФУ, 2015.
https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/36042/1/feofanova_vorotnikov_2015.pdf