

5.3-ҮТ шығару үлгісі (§ 5.5, § 5.2)

Келесі есептерде Лопиталь ережесін пайдаланып, көрсетілген шекті табу керек:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt[5]{3x - 1}}.$

▼ $x \rightarrow \infty$ ұмтылғанда шек астындағы бөлшектің алымы және бөлімі ақырсыздыққа ұмтылатындықтан, $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандыққа келеміз. Демек, Лопиталь ережесін қолдануға болады (§5.5, (1))

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt[5]{3x - 1}} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2x)}{(x^2 + 1)}}{\frac{3}{5}\sqrt[5]{(3x - 1)^{-4}}} = \frac{10}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \sqrt[5]{(3x - 1)^4}}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \frac{10}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{(3x - 1)^4} + x \left(\frac{4}{5} \right) (3x - 1)^{-\frac{1}{5}} \cdot 3}{2x} = \frac{10}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x - 5 + 12x}{10x^5 \sqrt[5]{3x - 1}} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x - 5}{x^5 \sqrt[5]{3x - 1}} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27 - \frac{5}{x}}{\sqrt[5]{3x - 1}} = 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$

▼ $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ұмтылғанда, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа келеміз.

Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\operatorname{tg}^2 2x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{2 \operatorname{tg} 2x \frac{2}{\cos^2 2x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 2x \cdot \cos x}{4 \sin 2x} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-\cos^3 2x) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \sin x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{5x} - 1}.$

▼ $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты Лопиталь ережесін қолданып ашамыз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{5x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{1 + 16x^2}}{5e^{5x}} = \frac{4}{5}. \quad \blacktriangle \\ 4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{4 + x^2}} - \frac{3}{\sqrt{16 + x - 4}} \right). \end{aligned}$$

▼ Мұндағы $\infty - \infty$ түріндегі анықталмағандықты түрлендіру

арқылы $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа әкелеміз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{4 + x^2}} - \frac{3}{\sqrt{16 + x - 4}} \right) &= \infty - \infty = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 + x} - 4 - 6 + 3\sqrt{4 + x^2}}{(2 - \sqrt{4 + x^2}) \cdot (\sqrt{16 + x - 4})} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(2\sqrt{16 + x})} + \frac{3x}{\sqrt{4 + x^2}}}{-\frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}(\sqrt{16 + x - 4}) + \frac{1}{2\sqrt{16 + x}}(2 - \sqrt{4 + x^2})} = \frac{\frac{1}{8}}{0} = \infty. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3} \right)^x.$$

▼ Мұнда 1^∞ түріндегі анықталмағандық тұр. Келесі белгі-леуді

енгіземіз: $y = \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3} \right)^x$. Онда $\ln y = x \ln \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 4} \cdot \frac{(2x + 3)(x^2 - x - 3) - (2x - 1)(x^2 + 3x - 4)}{(x^2 - x - 3)^2}}{\frac{1}{-x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x^2 (2x^3 - 2x^2 - 6x + 3x^2 - 3x - 9 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + x^2 + 3x - 4) \right). \end{aligned}$$

$$\cdot \left((x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 - x - 3) \right)^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 (-4x^2 + 2x - 13)}{(x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 - x - 3)} = 4.$$

Сонымен

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3} \right)^x = 4, \quad \text{сонда} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3} \right)^x = e^4. \quad \blacktriangle$$

1-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x} = 0, a > 0, a > 1.$

▼ Мұнда $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық екенін көреміз.

Лопиталь ережесін k рет ($k \geq a$) қолданып, келесі теңдікті аламыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\alpha^x (\ln a)^k} = 0. \quad \blacktriangle$$

2-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0.$

▼ Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0. \quad \blacktriangle$$

Ал $0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty, 1^\infty$ түріндегі анықталмағандықтар алгебралық түрлендірулер арқылы $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығына келтіріледі.

а) $0 \cdot \infty$ анықталмағандығын

$$(f(x) \cdot g(x), f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow a)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ түрлендіруі } \frac{0}{0} \text{ түріне,}$$

$$\text{ал } f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \text{ түрлендіруі } \frac{\infty}{\infty} \text{ түріне әкеледі.}$$

5-мысал.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right) &= \left| \infty - \infty \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

3.3.1.1
Лопиталь ережесін пайдаланып, көрсетілген
шектерді табыңыз:

1.

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{\ln x} - x}{x - 1}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a).$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} x \cdot \ln x.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow \infty} (a^{1/x} - 1)x.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}.$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}.$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}.$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}.$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

$$1.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}.$$

$$1.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{x}.$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\frac{1}{\cos x^2} - 2 \operatorname{tg} x}{1 - \cos 4x}.$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}.$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right).$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{3}{x} \right).$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}.$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}.$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}.$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}.$$

2.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1).$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right).$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}.$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{c^x - 1}.$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n}.$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x).$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \sin\left(\frac{a}{x}\right).$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right).$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}.$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow \pi/(2a)} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2}.$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}.$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^3}.$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}.$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sin 2x}.$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x.$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^2 2x}.$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}.$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[3]{x-3}}.$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} 4x.$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}.$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}(5x/2)}.$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \sin b/x).$$

3.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5 - 5e^{-3x}}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x - \frac{x^2}{2} - 1}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{x^2} - 1)}{\cos x - 1}.$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt[3]{x-3}}.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(1-x)}.$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \cos ax}{e^{\beta x} - \cos \beta x}.$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{6x}.$$