

Туынды

1. $(e^x)^{(n)} = e^x$. Бұл теңдіктің дұрыстығы көрініп тұр.
2. $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$;
3. $(x^m)^{(m)} = m!$, $(x^m)^{(n)} = 0$, $n > m$.
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

n рет дифференциалданатын $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының қосындысы мен көбейтіндісі үшін келесі дифференциалдау ережесі орындалады:

1. $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$;

2. Лейбниц формуласы: $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} =$
 $= u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \dots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \dots + u \cdot v^{(n)}.$

Мұнда $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1! = 1$.

Мысал: Есептеу керек: $(e^x \cdot x^2)^{(10)}$.

▼ Лейбниц формуласында $u = e^x$, $v = x^2$ деп алып, жоғары-дағы 1-ші және 2-ші мысалдарды пайдаланамыз:

$$\begin{aligned}(e^x \cdot x^2)^{(10)} &= (e^x)^{(10)} \cdot x^2 + 10 \cdot (e^x)^{(9)} \cdot (x^2)' + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot (e^x)^{(8)} (x^2)'' + \\ &+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} (e^x)^{(7)} \cdot (x^2)''' + \dots = e^x x^2 + 10 \cdot e^x \cdot 2x + 45 \cdot e^x \cdot 2 = \\ &= e^x (x^2 + 20x + 90). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Мысал. $y = 2x^4 + x^3 - 7$ функциясының үшінші ретті дифференциалын d^3y табу керек.

▼ Туындыларды есептейміз: $y' = 8x^3 + 3x^2$, $y'' = 24x^2 + 6x$, $y''' = 48x + 6$. Енді (2) формулада $n=3$ деп аламыз

$$d^3y = y'''dx^3 = (48x + 6)dx^3. \quad \blacktriangle$$

Келесі ережелердің орындалатынын тексеріңіздер:

$$1) d^n(u + v) = d^n u + d^n v;$$

$$2) d^n(u \cdot v) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} u \cdot d^k v.$$

Ескерту. Егер аргумент қандай да бір тәуелсіз айнымал t -нің n рет дифференциалданатын функциясы болса, онда жоғары дифференциал басқа түрге ие болады. Мысалы, $y = \varphi(z) = \varphi[(\psi(x))]$ күрделі функциясы үшін: $d^2y = d(dy) = d[\varphi'(z)dz] =$

$= d[\varphi'(z)] \cdot dz + \varphi'(z)d(dz) = \varphi''(z)dz^2 + \varphi'(z)d^2z$, яғни аргумент z тәуелді айнымал болса (2) теңдік орындалмайды.

1-мысал. $y = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$ функциясы $[-1, 1]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(-1) = f(1)$. Алайда бұл функция үшін, $f'(\xi) = 0$ теңдігі орындалатындай $\xi \in [-1; 1]$ нүктесі болмайтынын көру қиын емес. Бұлай болу себебі, функция $(-1; 1)$ интервалында дифференциалданбайды, функцияның $x = 0 \in [-1, 1]$ нүктесінде туындысы жоқ.

2-мысал. $y = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ функциясы $(0, 1)$ интервалында

дифференциалданады ($f'(x) = 1, \forall x \in (0; 1)$). Сонымен қатар $f(0) = f(1)$. Алайда $f'(\xi) = 0$ теңдігі орындалатындай $\xi \in [0; 1]$ нүктесі жоқ. Себебі, функция $(0, 1)$ интервалында үзіліссіз болғанмен, $[0, 1]$ кесіндісінде үзіліссіз емес ($x = 0$ – үзіліс нүктесі). Демек, Ролль теоремасында функцияның $[a, b]$ кесіндісіндегі үзіліссіздігін (a, b) интервалындағы үзіліссіздікпен ауыстыруға болмайды екен!

Ролль теоремасының геометриялық мағынасы: $y = f(x)$ функция графигінің $(\xi, f(\xi))$ нүктесіндегі жанамасы, OX осіне параллель болатындай $\xi \in (a, b)$ нүктесі табылады (54-сурет).

1-мысал. $y = x^3 - 3x^2 + 1$ функцияның монотонды аралық-тарын табу керек.

▼ Функцияның туындысының таңбасын анықтаймыз: $y' = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x - 2)$ (ол суретте көрсетілген). Туынды $(-\infty; 0)$ және $(2; +\infty)$ интервалдарында оң: $y'(x) > 0$ болатындықтан, бұл аралықтарда функция өспелі.



Ал $(0; 2)$ аралығында функция кемімелі, өйткені $x \in (0; 2)$ нүктелерінде $f'(x) < 0$.

Назар аударыңыз! Осы мысалдағы $x = 0$, $x = 2$ нүктелерін монотонды аралықтарға жатқызу немесе жатқызбау туралы сұрақтарды төменде қарастырамыз. ▲

2-мысал. $y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ функциясы $(-\infty; +\infty)$ аралығында үзіліссіз және үзіліссіз дифференциалданады:

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x > 0, \quad \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Сонымен бірге $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ және $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ теңдіктері

орындалады. Демек, $\operatorname{sh} x$ функциясы $(-\infty; +\infty)$ аралығында өспелі. Сондықтан оның бірімәнді үзіліссіз дифференциалданатын кері функциясы бар және оны келесі түрде белгілейді:

$$x = \operatorname{Arsh} y, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Мысалы: 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ функциясы (1-мысалды қараңыз) үшін $x = 0$, $x = 2$ нүктелерінде (9) шарттар орындалмайды: өйткені $x > 0$ болса $(\forall x: x \neq 0$ нүктелері үшін) $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 3x^2 + 1 - 1}{x} = x(x - 3) < 0$, ал $x < 0$ болса, $x(x - 3) > 0$. (Екінші $x = 2$ нүктесінде де (9) шарттар орындалмайтынын тексеріңіз). Демек, $x = 0$, $x = 2$ нүктелері функцияның өсу (кему) аралығында жатпайды;

2) $f(x) = x^3$ функциясы үшін $f'(x) = 3x^2 = 0$, яғни $x = 0$ - стационар нүкте және бұл нүкте маңайындағы $\forall x: x \neq 0$ нүктелер үшін $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 0}{x - 0} = x^2 > 0$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, $x = 0$ - функцияның өсу аралығында жатады.

Критикалық нүктелердегі функцияның сипаты (қосымша материал)

$y = f(x)$ функциясының туындысы нөлге тең $f'(x) = 0$ немесе туындысы жоқ нүктелер оның **критикалық нүктелері** деп аталады.

1) $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 1$ функциясының критикалық (стационар)

нүктелері: $f'(x) = 5x^4 - 5x^2 = 5x^2(x^2 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

$x_1 = 0$ нүктесінің $|x| < \frac{5}{3}$ - маңайындағы $\forall x: x \neq 0$ нүктелер үшін

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 1 - 1}{x} = \frac{x^5 - \frac{5}{3}x^3}{x} = \frac{x^3(x^2 - \frac{5}{3})}{x} = x(x^2 - \frac{5}{3}) < 0$$

орындалады. Демек, анықтама бойынша, $x_1 = 0$ нүктесінде функция кемиді.

Ал, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ - функцияның экстремум нүктелері (§6.1, 1-теорема).

2) $f(x) = \sqrt{|x|}$ функциясының $x = 0$ нүктеде туындысы жоқ. Шынындада,

$$f'(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{|x|}}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{|x|}}{-\sqrt{|x|^2}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{-\sqrt{|x|}} = -\infty;$$

$$f'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

Бұл теңдіктерден $x = 0$ - функцияның **локальді минимум нүктесі** екенін көреміз (§6.1, 1-теорема): $f(0) = 0$.

$$3) f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ функциясы үшін } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \text{ болғандықтан,}$$

7-теорема бойынша, $x=0$ – функцияның өсу нүктесі.

$$4) f(x) = \sqrt[3]{x^2} \text{ функциясының } x=0 \text{ нүктеде туындысы жоқ. Шынында}$$

да, $f'(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty;$

$$f'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

Бұл теңдіктерден $x=0$ - функцияның **локальді минимум нүктесі** екенін көреміз (§6.1, 1-теорема): $f(0) = 0$.

$$5) f(x) = \begin{cases} 3(x-1), & x < 1, \\ (x-1), & x \geq 1 \end{cases} \text{ функциясының } x=1 \text{ нүктесінде туындысы}$$

жоқ (тексеріңіз). Егер $x < 1$ болса, онда $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3(x-1) - 0}{x - 1} = 3 > 0$; ал,

$x > 1$ болса, онда $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x-1) - 0}{x - 1} = 1 > 0$. Олай болса, анықтама бойынша, $x=1$ – функцияның өсу нүктесі.

$$6) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ функциясы үшін } x=0 \text{ – критикалық нүкте.}$$

Бірақ бұл өсу нүктесі де, экстремум нүктесі де емес. Өйткені,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ туындының } x=0 \text{ нүктенің маңайындағы}$$

таңбасы тұрақты емес. Сонымен бірге, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = x \sin \frac{1}{x}$ өрнегінің де $x=0$ нүктенің маңайындағы таңбасы тұрақты емес.

1-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x} = 0, a > 0, a > 1.$

▼ Мұнда $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық екенін көреміз.

Лопиталь ережесін k рет ($k \geq a$) қолданып, келесі теңдікті аламыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\alpha^x (\ln a)^k} = 0. \quad \blacktriangle$$

2-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, a > 0.$

▼ Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a \cdot x^a} = 0. \quad \blacktriangle$$

Ал $0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty, 1^\infty$ түріндегі анықталмағандықтар алгебралық түрлендірулер арқылы $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығына келтіріледі.

а) $0 \cdot \infty$ анықталмағандығын

$$(f(x) \cdot g(x), f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow a)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ түрлендіруі } \frac{0}{0} \text{ түріне,}$$

$$\text{ал } f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \text{ түрлендіруі } \frac{\infty}{\infty} \text{ түріне әкеледі.}$$

3-мысал. Дәлелдеу керек: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0, \quad \alpha > 0.$

153

$$\blacktriangledown \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0. \quad \blacktriangle$$

б) $1^\infty, 0^0, \infty^0, (f(x))^{g(x)}$ – анықталмағандықтарын түрлендірулер арқылы $0 \cdot \infty$ түріне (а) жағдайына) келтіруге болады.

$$\begin{aligned} \text{4-мысал.} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)^{\ln x} &= (0^0) = \lim_{x \rightarrow 1+} e^{\ln x \cdot \ln(x-1)} = \\ &= (0 \cdot \infty) = e^{\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x} \right)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1}} = \end{aligned}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1+} (-x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln^2 x}{x-1}} = \left(\frac{0}{0} \right) = e^{-\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2 \ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

в) Ал $\infty - \infty$ ($f(x) - g(x), f \rightarrow +\infty, g \rightarrow +\infty (x \rightarrow a)$) анықталмағандығын $\frac{0}{0}$ түріне келтіруге болады:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}} = \frac{0}{0}.$$

5-мысал.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \left| \frac{0}{0} \right| =\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

5.1-ҮТ

Берілген функцияларды дифференциалдау керек

1.

$$1.1. y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}.$$

$$1.2. y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}.$$

$$1.3. y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}.$$

$$1.4. y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^3 + \frac{4}{x}.$$

$$1.5. y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{6}{x}.$$

$$1.6. y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}.$$

$$1.7. y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}.$$

$$1.8. y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}.$$

$$1.9. y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}.$$

$$1.10. y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}.$$

164

$$1.11. y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}.$$

$$1.12. y = 4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2}.$$

$$1.13. y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$$

$$1.14. y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4.$$

$$1.15. y = \frac{4}{x^5} - \frac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3.$$

$$1.16. y = \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7.$$

$$1.17. y = 5x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - 2x^6.$$

$$1.18. y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}.$$

$$1.19. y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3.$$

$$1.20. y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}.$$

$$1.21. y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}.$$

$$1.22. y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3.$$

$$1.23. y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}.$$

$$1.24. y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}.$$

$$\begin{array}{ll}
1.11. y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}. & 1.12. y = 4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2}. \\
1.13. y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}. & 1.14. y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4. \\
1.15. y = \frac{4}{x^5} - \frac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3. & 1.16. y = \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7. \\
1.17. y = 5x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - 2x^6. & 1.18. y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}. \\
1.19. y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3. & 1.20. y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}. \\
1.21. y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}. & 1.22. y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3. \\
1.23. y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}. & 1.24. y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}. \\
1.25. y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}. & 1.26. y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x. \\
1.27. y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}. & 1.28. y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}. \\
1.29. y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6. & 1.30. y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}.
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ll}
2.1. y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x-2)^5}. & 2.2. y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3 - 3x + 1}. \\
2.3. y = \sqrt{(x-4)^5} + \frac{5}{2x^2 + 4x - 1}. & 2.4. y = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 5} - \frac{5}{(x-1)^3}. \\
2.5. y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} + \frac{3}{(x-5)^4}. & 2.6. y = \sqrt{3x^4 - 2x^3 + x} - \frac{4}{(x+2)^3}.
\end{array}$$

$$2.7. y = \sqrt[3]{(x-7)^5} + \frac{5}{4x^2+3x-5}. \quad 2.8. y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \frac{2}{2x^2-3x+7}.$$

$$2.9. y = \frac{3}{(x-4)^7} - \sqrt{5x^2-4x+3}. \quad 2.10. y = \sqrt[3]{4x^2-3x-4} - \frac{3}{(x-3)^5}.$$

$$2.11. y = \frac{7}{(x-1)^3} + \sqrt{8x-3+x^2}. \quad 2.12. y = \sqrt[5]{3x^2+4x-5} + \frac{4}{(x-4)^4}.$$

$$2.13. y = \sqrt[3]{5x^4-2x-1} + \frac{8}{(x-5)^2}. \quad 2.14. y = \frac{3}{(x+2)^5} - \sqrt[7]{5x-7x^2-3}.$$

$$2.15. y = \sqrt[4]{(x-1)^5} - \frac{4}{7x^2-3x+2}. \quad 2.16. y = \sqrt[5]{(x-2)^6} - \frac{3}{7x^3-x^2-4}.$$

$$2.17. y = \frac{3}{(x+4)^2} - \sqrt[3]{4+3x-x^4}. \quad 2.18. y = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{8}{6x^2+3x-7}.$$

$$2.19. y = \sqrt{1+5x-2x^2} + \frac{3}{(x-3)^4}. \quad 2.20. y = \sqrt[3]{5+4x-x^2} - \frac{5}{(x+1)^3}.$$

$$2.21. y = \sqrt[4]{5x^2-4x+1} - \frac{7}{(x-5)^2}. \quad 2.22. y = \sqrt[5]{3-7x+x^2} - \frac{4}{(x-7)^5}.$$

$$2.23. y = \sqrt{(x-3)^7} + \frac{9}{7x^2-5x-8}. \quad 2.24. y = \sqrt[3]{(x-8)^4} - \frac{2}{1+3x-4x^2}.$$

$$2.25. y = \frac{3}{4x-3x^2+1} - \sqrt{(x+1)^5}. \quad 2.26. y = \frac{3}{x-4} + \sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}.$$

$$2.27. y = \frac{4}{(x-7)^3} - \sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}. \quad 2.28. y = \sqrt{(x-4)^7} - \frac{10}{3x^2-5x+1}.$$

$$2.29. y = \frac{7}{(x+2)^5} - \sqrt{8-5x+2x^2}. \quad 2.30. y = \sqrt[3]{(x-1)^5} + \frac{5}{2x^2-4x+7}.$$

3.

$$3.1. y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5.$$

$$3.2. y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3.$$

3.

$$3.1. y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5.$$

$$3.2. y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3.$$

166

$$3.3. y = \operatorname{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x^5.$$

$$3.4. y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x^4.$$

$$3.5. y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \arccos 3x^2.$$

$$3.6. y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x-3).$$

$$3.7. y = \ln^5 x \cdot \operatorname{arctg} 7x^4.$$

$$3.8. y = \operatorname{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x}.$$

$$3.9. y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 5x^3.$$

$$3.10. y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x+2).$$

$$3.11. y = 3^{\operatorname{tg} x} \cdot \arcsin 7x^4.$$

$$3.12. y = 5^{x^2} \cdot \arccos 2x^5.$$

$$3.13. y = \sin^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3.$$

$$3.14. y = \cos^3 4x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$3.15. y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arcsin x^5.$$

$$3.16. y = \operatorname{ctg}^7 x \cdot \arccos 2x^3.$$

$$3.17. y = e^{-\sin x} \cdot \operatorname{tg} 7x^6.$$

$$3.18. y = e^{\cos x} \cdot \operatorname{ctg} 8x^3.$$

$$3.19. y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x.$$

$$3.20. y = \sin^3 7x \cdot \operatorname{arctg} 5x^2.$$

$$3.21. y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arctg} x^5.$$

$$3.22. y = \cos \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4.$$

$$3.23. y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2.$$

$$3.24. y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x}.$$

$$3.25. y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \arccos x^4.$$

$$3.26. y = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 3x^5.$$

$$3.27. y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3.$$

$$3.28. y = 2^{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{arctg}^5 3x.$$

$$3.29. y = \sin^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$3.30. y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2.$$

4.

$$4.1. y = \operatorname{arctg}^2 5x \cdot \ln(x-4).$$

$$4.3. y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1).$$

$$4.5. y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 7x^2.$$

$$4.7. y = \operatorname{arctg}^5 x \cdot \log_2(x-3).$$

$$4.9. y = e^{-x} \cdot \arcsin^2 5x.$$

$$4.11. y = (x-4)^5 \cdot \operatorname{arctg} 3x^2.$$

$$4.2. y = \operatorname{arctg}^3 2x \cdot \ln(x+5).$$

$$4.4. y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}.$$

$$4.6. y = 5^{-x^2} \cdot \arcsin 3x^3.$$

$$4.8. y = \log_3(x+5) \cdot \arccos 3x.$$

$$4.10. y = \log_4(x-1) \cdot \arcsin^4 x.$$

$$4.12. y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3.$$

167

$$4.13. y = e^{-\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 7x^5.$$

$$4.15. y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg} x^4.$$

$$4.17. y = 3^{\cos x} \cdot \arcsin^2 3x.$$

$$4.19. y = \lg(x-2) \cdot \arcsin^5 x.$$

$$4.21. y = \ln(x+9) \cdot \operatorname{arctg}^3 2x.$$

$$4.23. y = 4^{-\sin x} \cdot \operatorname{arctg} 3x.$$

$$4.25. y = \lg(x-3) \cdot \arcsin^2 5x.$$

$$4.27. y = 2^{-x} \cdot \operatorname{arctg}^3 4x.$$

$$4.29. y = \lg(x+3) \cdot \operatorname{arctg}^2 5x.$$

$$4.14. y = (x+1)^5 \cdot \arccos 3x^4.$$

$$4.16. y = 3^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 2x^5.$$

$$4.18. y = \ln(x-10) \cdot \arccos^2 4x.$$

$$4.20. y = \log_3(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^5 7x.$$

$$4.22. y = \lg(x+2) \cdot \arcsin^2 3x.$$

$$4.24. y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg}^3 x.$$

$$4.26. y = \log_2(x+3) \cdot \arccos^2 x.$$

$$4.28. y = \ln(x-4) \cdot \operatorname{arctg}^4 3x.$$

$$4.30. y = \log_5(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3.$$