

I. Негізгі түсініктерді бекіту

Берілген жиындар үшін олардың инфимумы (inf) мен супремумын (sup) табыңдар.

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $B = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 9\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

♦ II. Орта деңгей тапсырмалары

Төмендегі жиындардың инфимумын және супремумын дәлелдеумен табыңдар.

1. $A = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 \leq 0\}$
4. $D = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in (2, 5)\right\}$

♦ III. Күрделі деңгей (талдау талап етіледі)

1. Дәлелдеңіздер, егер $A \subseteq B$, онда

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x + 1 < 0\}$ жиынының шекаралық нүктелерін және оның инфимумын, супремумын табыңдар.
3. Кез келген $a > 0$ үшін

$$S = \left\{\frac{1}{n} + a \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

жиынының $\inf S$ және $\sup S$ -ын анықтаңдар 

IV. Шығармашылық және дәлелдеуге арналған тапсырмалар

1. Егер жиынның жоғарғы шегі бар, бірақ супремумы жоқ болса, мысал келтіріңдер (мұндай жиын $\mathbb{Q}$ -да бар).
2. Супремумы бар, бірақ максимумы жоқ жиынға мысал келтіріңдер.
3. Инфимумы бар, бірақ минимумы жоқ жиынға мысал келтіріңдер.
4. Дәлелдеңдер:

Егер A — шектелген жиын болса, онда $-A = \{-x \mid x \in A\}$ жиыны үшін

$$\inf(-A) = -\sup(A), \quad \sup(-A) = -\inf(A).$$

■ ТАҚЫРЫП: Кеңейтілген сан осі және оның қасиеттері

1. Негізгі теориялық еске салу

Кеңейтілген нақты сандар жиыны:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Мұнда $-\infty$ және $+\infty$ — бұл кеңейтілген нүктелер, яғни шектер мен толықтықты сипаттау үшін енгізіледі.

Олар келесі қатынастарды қанағаттандырады:

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



I. Теориялық сұрақтар

1. Кеңейтілген сан осі не үшін енгізіледі?
2. $-\infty$ және $+\infty$ -нің негізгі арифметикалық қасиеттерін жазыңыз.
3. Кеңейтілген нақты сандар жиыны $\overline{\mathbb{R}}$ толық па?
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ пен $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ұғымдарының айырмашылығын түсіндіріңіз.
5. Қандай жағдайда $\frac{1}{0} = +\infty$ және $\frac{1}{0} = -\infty$ деп айту орынды?

◆ II. Есептер (негізгі деңгей)

1. Төмендегі тізбектердің шектерін кеңейтілген сан осінде анықтаңыз:
 - a) $a_n = n$
 - b) $b_n = (-1)^n \cdot n$
 - c) $c_n = \frac{1}{n}$
 - d) $d_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$
2. Төмендегі функциялар үшін $x \rightarrow +\infty$ және $x \rightarrow -\infty$ кезіндегі шектерін табыңыз:
 - a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
 - b) $g(x) = \frac{2x-5}{x+1}$
 - c) $h(x) = e^{-x}$
 - d) $k(x) = \arctan x$
3. Келесі шамаларды есептеңіз немесе «анықталмаған» деп жазыңыз:
 - a) $+\infty + 5$
 - b) $-\infty - 10$
 - c) $+\infty - (+\infty)$
 - d) $0 \cdot \infty$
 - e) $\frac{\infty}{\infty}$

♦ III. Орта деңгей есептер

1. Төмендегі жиындар үшін инфинум және супремумды кеңейтілген осі тұрғысынан табыңыз:

a) $A = \{\frac{1}{x} \mid x > 0\}$

b) $B = \{x - \frac{1}{x} \mid x > 0\}$

c) $C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

2. Көрсетіңіздер, егер $A \subset \mathbb{R}$ шектелмеген болса, онда

$$\sup A = +\infty \text{ және } \inf A = -\infty.$$

3. Егер $x_n \rightarrow +\infty$ және $y_n \rightarrow a$ (мұндағы $a \in \mathbb{R}$), дәлелдеңіз:

$$x_n + y_n \rightarrow +\infty.$$

4. Егер $x_n \rightarrow +\infty$, дәлелдеңіз:

$$\frac{1}{x_n} \rightarrow 0.$$

▲ IV. Күрделі және дәлелдеуге арналған тапсырмалар

1. Дәлелдеңіз:

Егер $x_n \rightarrow +\infty$ және $y_n \rightarrow -\infty$, онда

$$x_n + y_n$$

жинақталмауы мүмкін екенін көрсетіңіз (мысал келтіріңіз).

2. Төмендегі шектерді есептеңіз (кеңейтілген осі тұрғысынан):

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$

3. Мына функция үшін шек пен шексіздік арасындағы байланысты көрсетіңіз:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}.$$

Оның асимптоталарын табыңыз және $x \rightarrow \infty$ кезінде $f(x)$ -тің мінез-құлқын сипаттаңыз.

4. Дәлелдеңіз:

Егер $x_n \rightarrow +\infty$, онда кез келген $k > 0$ үшін

$$\frac{1}{x_n^k} \rightarrow 0.$$

☀ V. Шығармашылық және зерттеу элементтері

1. Кеңейтілген сан осінде функцияның үздіксіздігі ұғымын мысалмен түсіндіріңіз.

2. $f(x) = \tan x$ функциясының кеңейтілген осіндегі үзіліс нүктелерін талдаңыз.

3. Кеңейтілген осіні геометриялық түрде сипаттаңыз (шеңбер түрінде бейнелеу — Римдік проекция).

4. Өз функцияңызды ойлап тауып, оның $x \rightarrow \infty$ және $x \rightarrow -\infty$ шектерін есептеңіз.

2-тапсырма.

Кесте арқылы берілген функция:

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	1	0	1	4	9

а) Функцияның аналитикалық түрін анықтаңдар.

ә) Бұл функцияның тақ, жұп не тақ та, жұп та емес екенін көрсетіңдер.

3-тапсырма.

График арқылы берілген функция $y = f(x)$.

Берілген нүктелер:

$A(-2, 4), B(-1, 1), C(0, 0), D(1, 1), E(2, 4)$.

а) Графиктің симметриясын анықтаңдар.

ә) Қай аралықтарда функция өседі, қай аралықтарда кемиді?

4-тапсырма.

Формула арқылы берілген функцияны талдаңдар:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

а) Анықталу облысын табыңдар.

ә) Үзіліс бар ма екенін анықтаңдар.

б) Функция графигін сипаттаңдар.

5-тапсырма.

Сызба түрінде функцияның графигі берілген.

(Мысалы, $y = |x - 1|$).

а) Графикті талдаңдар (минимум, өсу-кему аралығы).

ә) Функцияның қасиеттерін жазыңдар (жұптық, тақтық, периодтылық және т.б.).

6-тапсырма. (шығармашылық)

Кесте арқылы берілген деректер негізінде функцияның жуық формуласын табыңдар:

x	1	2	3	4	5
f(x)	3	6	11	18	27

Кеңес: $f(x) = x^2 + 2$ немесе басқа сәйкесті формуланы болжап тексеріңдер.