

Он бесінші лекция

ФУНКЦИЯ ЭКСТРЕМУМЫ

Екі айнымалыдан тәуелді $z = f(x, y)$ функциясын қарастырайық. $M(x_0, y_0)$ нүктесі функцияның анықталу облысына тиісті нүкте болсын.

Анықтама. $M(x_0, y_0)$ нүктенің жақын маңайында жатқан барлық (x, y) нүктелер үшін $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0, y_0)$ функцияның максимум нүктесі деп, ал $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0, y_0)$ функцияның минимум нүктесі деп аталады.

Функция максимумы мен минимумы функция экстремумы деп аталады.

Экстремумның қажетті шарты. $M(x_0, y_0)$ нүктесі $z = f(x, y)$ функциясының экстремум нүктесі болса, онда бұл нүктедегі функцияның дербес туындылары нөлге тең,

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Экстремумның жеткілікті шарты. $z = f(x, y)$ функциясы:
1) дербес туындылары нөлге тең болатын $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, $M(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында анықталған болсын; 2) функцияның осы нүктеде екінші ретті үзіліссіз туындылары бар,

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Онда, егер $\Delta = AC - B^2 > 0$ болса $M(x_0, y_0)$ нүктеде экстремум бар, және егер $A < 0$ – максимум, $A > 0$ – минимум; ал $\Delta = AC - B^2 < 0$ болса $M(x_0, y_0)$ нүктеде экстремум жоқ; $\Delta = AC - B^2 = 0$ болса $M(x_0, y_0)$ нүктеде экстремумның бар жоқтығы белгісіз.

Екі айнымалы функцияны экстремумға мынадай ретпен зерттеген жөн:

1. Функцияның z'_x және z'_y дербес туындыларын табу;

2. $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіп, күдікті нүктелерді табу;
3. Функцияның екінші ретті дербес туындыларын тауып, экстремумның жеткілікті шарты бойынша экстремумның бар жоқтығын анықтау;
4. Функция экстремумдарын (экстремум нүктедегі) мәнін табу.

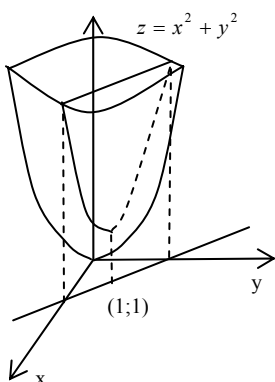
ШАРТТЫ ЭКСТРЕМУМ. ЛАГРАНЖ ӘДІСІ

Екі айнымалы функция экстремумын оның бүкіл анықталу облысында емес, тек берілген шартты қанағаттандыратын жиында қарастырайық.

Айталық $z = f(x, y)$ функциясының x және y аргументтері *байланыс теңдеуі* деп аталатын $g(x, y) = 0$ теңдеуін қанағаттандырсын.

Анықтама. $M(x_0, y_0)$ нүктенің жақын маңайында жатқан $g(x, y) = 0$ теңдеуін қанағаттандыратын барлық (x, y) нүктелер үшін $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0, y_0)$ функцияның шартты максимум нүктесі деп, ал $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0, y_0)$ функцияның шартты минимум нүктесі деп аталады.

Функцияның шартты экстремумын қарапайым жағдайларда бір айнымалы функция экстремумын табуға келтіреді.



Мысалы, $z = x^2 + y^2$ функцияның мына шартты $x + y - 2 = 0$ қанағаттандыратын экстремумын табу керек.

Шешуі. Байланыс теңдеуіндегі y айнымалыны x арқылы өрнектейік, $y = 2 - x$. Берілген функциядағы y айнымалының орнына қойсақ бір айнымалыдан тәуелді функция аламыз:

$$z = x^2 + (2 - x)^2$$

немесе $z = 2x^2 - 4x + 4$. Бұл функцияның жалғыз ғана минимум мәні бар, ол $x = 1$

болғанда. Осы нүктедегі $y = 2 - x$ функцияның мәні $y = 2 - 1 = 1$. Сонымен берілген функцияның шартты экстремум нүктесі - (1,1). Функцияның шартты экстремумы $z = 1^2 + 1^2 = 2$.

Мысалдан көрініп тұрғандай функцияның шартты экстремумы (минимумы) функцияның шартсыз экстремумынан (функцияның (0,0) нүктесіндегі минимумнан) өзгеше.

Жалпы жағдайда шартты экстремумды Лагранж әдісімен табады. Енді осы әдісті қарастырайық.

Үш айнымалыдан тәуелді

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

функциясын қарастырамыз. Бұл функция **Лагранж функциясы** деп, λ - **Лагранж көбейткіші** деп аталады. Мынадай теорема дұрыс болады.

Теорема. Егер (x_0, y_0) нүкте $z = f(x, y)$ функциясының $g(x, y) = 0$ шартын қанағаттандыратын шартты экстремум нүктесі болса, онда қандай да бір λ_0 табылады да, (x_0, y_0, λ_0) нүкте $L(x, y, \lambda)$ функциясының экстремум нүктесі болады.

Сонымен, $z = f(x, y)$ функциясының $g(x, y) = 0$ шартын қанағаттандыратын шартты экстремумын табу үшін мынадай жүйені шешу керек:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0 \\ L'_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

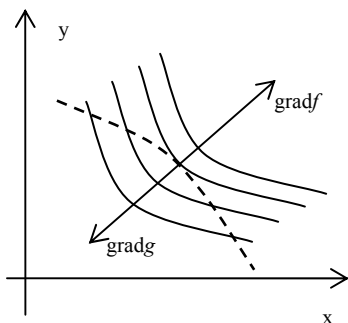
Бұл жүйедегі соңғы теңдеу - байланыс теңдеуі. Ал бастапқы екі теңдеуді мынадай түрде жазуға болады:

$$\text{grad } f = -\lambda \text{ grad } g,$$

яғни, шартты экстремум нүктесінде $f(x, y)$ және $g(x, y)$ функцияларының градиенттері коллинеар болады.

Суретте Лагранж шартының геометриялық мағынасы көрсетілген. Үзік сызықпен $g(x, y) = 0$ байланыс сызығы

кескінделген, ал тегіс сызықпен функцияның $f(x,y)=C$ деңгейлік сызығы кескінделген. Сонда *шартты экстремум нүктесінде* $z=f(x,y)$ функциясының деңгейлік сызығы байланыс сызығымен жанасады.



Енді алдыңғы мысалды $z=x^2+y^2$ функцияның мына шартты

$$x+y-2=0$$

қанағаттандыратын экстремумын Лагранж әдісімен тауып көрейік.

Шешімі. Лагранж функциясын құрамыз:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda (x + y - 2).$$

Дербес туындыларын

$$L'_x = 2x + \lambda, \quad L'_y = 2y + \lambda, \quad L'_\lambda = x + y - 2$$

тауып, нолге теңестіріп жүйе шешеміз:

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Жүйенің жалғыз шешімі бар. Осыдан берілген функцияның шартты экстремум нүктесі - (1, 1) екендігі шығады. Функцияның шартты экстремумы $z=1^2+1^2=2$.