

Он үшінші лекция

§ 8.2. Меншіксіз интегралдар, қасиеттері және жинақтылық белгілері

8.2.1. Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдар.

Біз осыған дейін анықталған интегралдар туралы айтқанда, интегралдау аралығы ақырлы және интеграл астындағы функция осы аралықта шенелген деп қабылдадық. Бірақ анықталған интеграл анықтамасын *ақырсыз интегралдау аралығы үшін және шенелмеген функция* жағдайына арнап беру қажеттігі жиі кездеседі. Енді осы

мәселелерді қарастырайық.

I. f функциясы:

а) $[a, +\infty)$ аралығында берілсін;

б) кез келген ақырлы $[a; b']$ кесіндісінде Риман бойынша интегралдансын ($b' \in (a, +\infty)$).

Онда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b' \rightarrow +\infty} \int_a^{b'} f(x) dx \quad (1)$$

өрнегі f функциясының $[a, +\infty)$ аралығындағы **бірінші текті меншіксіз интегралы** деп аталады. Егер мұндағы шек бар болса, онда **меншіксіз интеграл жинақты**, ал ол шек жоқ немесе ақырсыз болса, онда **меншіксіз интеграл жинақсыз** деп айтатын боламыз.

II. f функциясы:

а) ақырлы $[a, b)$ аралығында берілсін және b нүктесінің **маңайында шенелмеген** болсын;

б) кез келген $[a; b']$ кесіндісінде ($a < b' < b$) Риман бойынша интегралдансын.

Онда мына өрнек

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x) dx, \quad (2)$$

f функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі **екінші текті меншіксіз интегралы** деп аталады. Мұнда да (2) шек бар болса, **меншіксіз интеграл жинақты**, ал ол шек жоқ немесе ақырсыз болса, **меншіксіз интеграл жинақсыз** дейміз.

Егер f функциясы үшін I ($b = +\infty$) немесе II (b нүктесінің маңайында f шенелмеген) шарттардың тек біреуі ғана бар болса, онда

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

өрнегін **жалғыз ерекшелігі интегралдың жоғарғы b шегінде болатын интеграл** деп атайтын боламыз.

Енді жалғыз ерекшелігі интегралдың төменгі a шегінде болатын меншіксіз интегралды анықтайық.

I. Егер f функциясы:

а) $(-\infty; b]$ аралығында берілген;

б) кез келген ақырлы $[a'; b]$ кесіндісінде $(-\infty < a' < b)$ Риман бойынша интегралданатын болса, онда
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a' \rightarrow -\infty} \int_{a'}^b f(x) dx$$

өрнегі f функциясының $(-\infty; b]$ **аралығындағы бірінші текті меншіксіз интегралы** деп аталады да, мұндағы шек бар болса, ол **жинақты**, ал ол жоқ немесе ақырсыз болса, **жинақсыз** деп аталады.

II. Егер f функциясы:

а) ақырлы $(a, b]$ аралығында берілген және a нүктесінің маңайында шенелмеген функция;

б) кез келген $[a', b]$ кесіндісінде $(a < a' < b)$ Риман бойынша интегралданатын функция болса, онда
$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a' \rightarrow a} \int_{a'}^b f(x) dx$$

өрнегі f функциясының $(a; b]$ **аралығындағы екінші текті меншіксіз интеграл** деп аталады да, мұндағы шек бар болса, ол **жинақты**, ал ол жоқ немесе ақырсыз болса, **жинақсыз** деп аталады.

1-мысал. Келесі 1-текті меншіксіз интеграл үшін:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

▼ Егер $\alpha \neq 1$ болса, онда

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{b' \rightarrow +\infty} \int_1^{b'} x^{-\alpha} dx = \lim_{b' \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{b'} = \lim_{b' \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b'^{1-\alpha} - 1) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & 1-\alpha < 0, \\ +\infty, & 1-\alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Егер $\alpha=1$ болса, онда

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b' \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^{b'} = \lim_{b' \rightarrow +\infty} (\ln |b'| - \ln |1|) = +\infty \text{ аламыз. } \blacktriangle$$

2-мысал. Екінші текті интеграл үшін:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

▼ (4) өрнек – ерекшелігі $a = 0$ нүктесінде болатын екінші текті меншіксіз интеграл. Мұнда $\alpha \neq 1$ мәндері үшін

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 1-\alpha > 0, \\ +\infty, & 1-\alpha < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

аламыз. Егер $\alpha=1$ болса, онда

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln |x| \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Ал егер $\alpha < 0$ болса, онда интеграл астындағы функция $[0,1]$ интегралдау аралығында үзіліссіз және ақырлы болғандықтан, Риман бойынша интегралданады.

Сонымен қарастырылған интеграл $\alpha < 1$ үшін жинақты, ал $\alpha \geq 1$ мәндері үшін жинақсыз болады екен. $\blacktriangle$

3-мысал. Келесі теңдікті дәлелдейік:
$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k > 0, \\ +\infty, & k \leq 0. \end{cases}$$

▼ Егер $k = 0$ болса, онда
$$\int_0^{+\infty} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} b = +\infty.$$

Егер $k \neq 0$ болса, онда

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{k} \right) \int_0^R e^{-kx} d(-kx) = \lim_{R \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-kx}}{k} \Big|_0^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} -\frac{1}{k} (e^{-kR} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k > 0, \\ +\infty, & k < 0. \end{cases} \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Біз бұдан кейін үнемділік және ықшамдылық мақсатта меншіксіз интегралдар қасиеттерін жалғыз ерекшелігі жоғарғы интегралдау шегінде, яғни b нүктесінде болатын интегралдарға қатысты тұжырымдаймыз, ал ол тұжырымдар жалғыз ерекшелігі a нүктесінде болатын интеграл үшін де орындалады.

Теорема. (Коши критерийі) Жалғыз ерекшелігі b нүктесінде болатын $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралының жинақты болуына, берілген әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы $b_0 < b' < b'' < b$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын кез келген b', b'' сандары үшін

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(t) dt \right| < \varepsilon \quad (4)$$

теңсіздігі орындалатындай b_0 санының табылуы қажетті және жеткілікті.

▼ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a < x < b$, функциясын қарастырамыз.

Қарастырылып отырған интегралдың бар болуы $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} F(x)$ шегінің бар болуымен парапар, ал бұл шектің бар болуы Коши шартының орындалуына парапар; әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы $b_0 < b' < b'' < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық b', b'' сандары үшін $|F(b'') - F(b')| < \varepsilon$ шарты орындалатындай b_0 саны ($a < b_0 < b$)

табылады. Енді $F(b'') - F(b') = \int_a^{b''} f(t)dt - \int_a^{b'} f(t)dt = \int_{b'}^{b''} f(t)dt$ өрнегін

алдыңғы теңсіздікке қойсақ, теорема дәлелденеді. ▲

Жалғыз ерекшелігі b нүктесінде болатын (3) түрдегі интеграл үшін келесі теңдіктер орындалады:

$$1) \int_a^b [Af(x) + Bg(x)] = A \int_a^b f(x)dx + B \int_a^b g(x)dx, \quad A, B, \text{ -сандар};$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x)dx = \lim_{b' \rightarrow b} \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^{b'} f(x)dx \right) = \\ = \int_a^c f(x)dx + \lim_{b' \rightarrow b} \int_c^{b'} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b,$$

мұндағы $\int_a^b f(x)dx$ және $\int_c^b f(x)dx$ – меншіксіз интегралдар, ал бұл интегралдардың бар болуы үшін Коши шарты екеуіне де бірдей тұжырымдалатындықтан, олардың екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз болады. Ал $\int_a^c f(x)dx$ – кәдімгі Риман интегралы.

Ескерту. Меншіксіз интегралдар үшін Риман интегралына тән қасиеттердің барлығы сақтала бермейді. Мысалы, егер

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ болса, онда } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ меншіксіз интегралы жинақты,}$$

$$\text{ал } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ меншіксіз интегралы жинақсыз.}$$

Егер меншіксіз интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясы белгісіз болса, онда оның жинақтылығы туралы айту қиын. Ондай жағдайларда кейде алғашқы функцияны керек етпейтін арнайы белгілерді пайдаланып, интегралдың жинақты немесе жинақсыздығын білуге болады. Енді осы мәселелерге көшейік.

8.2.2. Меншіксіз интегралдардың жинақтылық белгілері.

Таңбасы тұрақты емес функция интегралын зерттеуге арналған келесі ұғымды енгізейік. Егер

$$\int_a^b |f(x)| dx \quad (5)$$

интегралы жинақты болса, онда

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6)$$

интегралы **абсолют жинақты** деп аталады. Егер (6) жинақты, ал (5) жинақсыз интеграл болса, онда (6) интеграл **шартты жинақты** деп аталады.

1-теорема. Абсолют жинақты интеграл – жинақты.

▼ Шынында да, (5) интегралдың жинақтылығынан ол интеграл үшін Коши шартының орындалатыны шығады: әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы $b_0 < b' < b'' < b$ теңсіздіктерін қанағат-тандыратын b', b'' нүктелері үшін $\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)| dx \geq \left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right|$ теңсіздігі орындалатындай b_0 нүктесі табылады. Ал бұл қатыстардан (6) интеграл үшін Коши шарты орындалып тұрғанын көреміз. ▲

(6) интегралды жинақтылыққа зерттеу үшін көбінесе

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad a < b. \quad (7)$$

теңсіздігі пайдаланылады. Бұл теңсіздікті белгілі $\left| \int_a^{b'} f(x) dx \right| \leq \int_a^{b'} |f(x)| dx$

теңсіздігінен $b' \rightarrow b$ ұмтылдырып шекке өту арқылы алады.

Егер (7) теңсіздіктің оң жағындағы интеграл жинақты болса, онда 1-теорема бойынша (6) интеграл да жинақты.

Ескерту. Егер $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ болса, онда (6) интегралдың жинақтылығы мен жинақсыздығын сәйкес келесі түрлерде жазады:

$$\int_a^b f(x) dx < \infty \quad \text{және} \quad \int_a^b f(x) dx = \infty.$$

Енді теріс емес функциялардың меншіксіз интегралдарын жинақтылыққа зерттейік.

2-теорема. Жалғыз ерекшелігі b нүктесінде болатын

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (8)$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx \quad (9)$$

интегралдары үшін $[a, b]$ аралығында

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x) \quad (10)$$

теңсіздіктері орындалсын. Онда $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$ теңсіздігі орындалады және (9) интегралдың жинақтылығынан (8) интегралдың да жинақтылығы, ал (8) интегралдың жинақсыздығынан (9) интегралдың да жинақсыздығы шығады.

▼ (10) теңсіздіктерден $a < b' < b$ үшін

$$\int_a^{b'} f(x) dx \leq \int_a^{b'} \varphi(x) dx \quad (11)$$

аламыз. Егер (9) интеграл жинақты болса, онда (11) теңсіздіктің оң жағы, демек, сол жағы да (9) интегралға тең санмен шенеледі. Ал (11) теңсіздіктің сол жағы b' өскенде монотонды кемімейді. Сондықтан (11) теңсіздіктің сол жағының шегі үшін

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

болады, демек (8) интеграл жинақты. Керісінше, егер (8) интеграл жинақсыз болса, яғни $b' \rightarrow b$ ұмтылғанда (11) теңсіздіктің сол жағы ∞ -ке ұмтылса, онда одан кіші емес оның оң жағындағы шама да ∞ -ке ұмтылады, яғни (9) интеграл жинақсыз болады. ▲

4-мысал. $\int_0^{+\infty} |\cos \alpha x \cdot e^{-2x}| dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx < \infty$ теңсіздігінен

$\int_0^{+\infty} \cos \alpha x \cdot e^{-2x} dx$ интегралы абсолют жинақты болатыны шығады.

2-теорема. (8) және (9) интегралдардың ерекшелігі жалғыз b нүктесінде болсын. Егер интеграл астындағы функциялар оң және

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0 \quad (12)$$

болса, онда (8), (9) интегралдардың жинақталу сипаты бірдей (екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз) болады.

▼ (12) теңдіктен $0 < \varepsilon < A$ болатындай кез келген ε саны арқылы $c < x < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon \text{ немесе } A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon \quad (13)$$

шарты орындалатындай $c \in [a, b)$ нүктесін табуға болады. Соңғы қос теңсіздікті $\varphi(x) > 0$ функциясына көбейтеміз.

Егер $\int_a^b \varphi dx$ жинақты болса, онда $\int_c^b \varphi dx$ және $\int_c^b (A + \varepsilon) \varphi(x) dx$ интегралдарды да жинақты. Сондықтан 1-теорема бойынша (13) қос теңсіздіктің оң жағынан $\int_c^b f(x) dx$ интегралының, олай болса $\int_a^b f(x) dx$ интегралының да жинақтылығын аламыз. Дәл осылай, керісінше, $\int_a^b f dx$ интегралының жинақтылығынан (13) қос теңсіздіктің сол жақ бөлігіне қарап $\int_a^b \varphi dx$ интегралының жинақтылығын айтуға болады.

Осы сияқты (8)-(9) интегралдарының біреуінің жинақсыздығынан екіншісінің де жинақсыздығы шығатынын дәлелдеуге болады. ▲

Алдымызда, қарастырылатын интегралдардың жинақтылық сипаттары бірдей екенін $\sim$ таңбасы арқылы белгілейтін боламыз.

5-мысал. $\int_0^1 \frac{1}{\sin \sqrt{x}} dx$ интегралы жинақты.

▼ Шынында да, $\int_0^1 \frac{1}{\sin \sqrt{x}} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$, өйткені

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sin \sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} = 1. \quad \blacktriangle$$

6-мысал. Меншіксіз $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{-3x} dx$ интегралы жинақты.

▼ Шынында да, $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{-3x} dx \sim \int_1^{+\infty} e^{-3x} dx < \infty$, өйткені

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1}{x} \cdot e^{-3x}}{e^{-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1. \quad \blacktriangle$$

7-мысал. $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$, $a > 0$, интегралдарының

шартты жинақты болатынын көрсетейік.

▼ Мына теңдіктен:

$$\int_a^E \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad dv = \sin x dx \\ du = -\frac{1}{x^2} dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -\frac{\cos x}{x} \Big|_a^E - \int_a^E \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$E \rightarrow \infty$ ұмтылдырып, шекке көшсек ($\lim_{E \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos E}{E} \right) = 0$),

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos a}{a} - \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \quad (14)$$

аламыз. Сонымен бірге $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} < \infty$ теңсіздігі орындалатындықтан, (14) теңдіктің оң жағындағы интеграл жинақты, олай болса, $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ интегралы да **жинақты**.

Осы сияқты, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ интегралының да **жинақты** болатынын көрсетуге болады.

Енді $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ интегралының **жинақсыздығын** көрсетейік. Ол үшін $|\sin x| \geq \sin^2 x$ теңсіздігін пайдаланамыз:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &\geq \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \left| 2x = u \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_{2a}^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u} du = \frac{1}{2} \int_{2a}^{+\infty} \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int_{2a}^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du. \end{aligned}$$

Мұндағы $\int_{2a}^{+\infty} \frac{du}{u}$ – жинақсыз, ал $\int_{2a}^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ – жинақты интеграл.

Олай болса 1-теорема бойынша $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ – жинақсыз.

$\int_a^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx$ интегралының да жинақсыздығы осылайша көрсетіледі. ▲