

Он екінші лекция

8.1.3. Интегралдың жоғарғы шегі арқылы туынды алу

f функциясының интегралдық қосындысы $\delta_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j$ түрінде жазылатындықтан, интегралдау айнымалысын кез келген әріппен белгілеуге болады: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$.

Біз төменде интегралдау айнымалысын, оқырманға түсінікті болу үшін, ыңғайлы әріппен алмастырып отыратын боламыз. $[a; b]$ кесіндісінде f интегралданатын функция болсын. Онда ол кез келген $x \in [a; b]$ нүктесі үшін $[a, x]$ кесіндісінде де интегралданады. Мысалы, $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз немесе монотонды функция $[a, x] \subset [a; b]$ кесіндісінде де сәйкес үзіліссіз немесе монотонды, демек, интегралданады.

Әрбір $x \in [a; b]$ санына анықталған $\int_a^x f(u) du$ мәні сәйкес келетіндіктен, келесі функция

$$F(x) = \int_a^x f(u) du \quad (1)$$

интегралдың жоғарғы шегіне тәуелді.

1-теорема. Егер $[a; b]$ кесіндісінде f функциясы интегралданса, онда $F(x) = \int_a^x f(u) du$ функциясы кез келген $x \in [a; b]$ нүктесінде үзіліссіз.

▼ Кез келген $x \in [a; b]$ нүктесін алып, оған h өсімше берейік. Онда интегралданатын функцияның $[a; b]$ кесіндісінде шенелгендігін пайдаланып,

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+h} f(u) du - \int_a^x f(u) du \right| = \\ &= \left| \int_a^x f(u) du + \int_x^{x+h} f(u) du - \int_a^x f(u) du \right| = \left| \int_x^{x+h} f(u) du \right| \leq \\ &\leq \int_x^{x+h} |f(u)| du \leq M \cdot \int_x^{x+h} du = M \cdot h, \quad a \leq b, \end{aligned}$$

аламыз. Бұл теңсіздіктен $\lim_{h \rightarrow 0} [F(x+h) - F(x)] = 0$, яғни F функциясының x нүктесінде үзіліссіздігін аламыз. ▲

Мұнда x нүктесінде f үзілісті функция болса да, $F(x)$ функциясы осы x нүктесінде үзіліссіз болатынына оқушының назарын аударамыз!

2-теорема. Егер $[a; b]$ кесіндісінде f функциясы интегралданса және $x_0 \in [a; b]$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы x_0 нүктесінде $F'(x_0)$ туындысы бар және келесі теңдік орындалады:

$$F'(x_0) = \left[\int_a^x f(u) du \right]' \Big|_{x=x_0} = f(x_0). \quad (2)$$

▼ Алдымен, f функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіздігінен

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(u) - f(x_0)] du = 0 \quad (3)$$

шығатынын көрсетейік. Шынында да, f функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болғандықтан $\lim_{u \rightarrow x_0} f(u) = f(x_0)$, яғни, $\forall \varepsilon > 0$ саны арқылы барлық $u \in [x_0; x_0 + h]$ үшін $|h| < \delta$ болса, $|f(u) - f(x_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай δ саны табылады. Сондықтан $|h| < \delta$ үшін

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(u) - f(x_0)] du \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(u) - f(x_0)| du \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon du \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \varepsilon h \right| = \varepsilon$$

орындалады, яғни (3) теңдікті аламыз.

Енді (3) теңдікке сүйеніп, (2) теңдікті алуға болады:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(u) du - \int_a^{x_0} f(u) du \right] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(u) du = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \{ f(x_0) + [f(u) - f(x_0)] \} du = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) du + \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(u) - f(x_0)] du. \end{aligned}$$

Интегралдау айнымалысы u , ал $f(x)$ осы u -ға тәуелсіз болғандықтан, ол тұрақты сан рөлін атқарады да,

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) du = \frac{1}{h} f(x_0) \cdot u \Big|_{x_0}^{x_0+h} = \frac{1}{h} f(x_0) \cdot h = f(x_0)$$

болады. Олай болса жоғарғы теңдік келесі түрде жазылады:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) + \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(u) - f(x_0)] du. \text{ Енді (3) ескерсек,}$$

онда $F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$, яғни (2) теңдікті аламыз. ▲

Ескерту: $\Phi(x) = \int_x^b f(u) du$, $a \leq x \leq b$ функциясы үшін де 1 және

2-теоремалар дұрыс: $\Phi(x) = \int_x^b f(u) du = \int_a^b f(u) du - \int_a^x f(u) du =$

$$= \int_a^b f(u) du - F(x), \text{ ал тұрақты мен үзіліссіз функциялардың}$$

айырымы үзіліссіз функция. Бұдан 2-теорема бойынша, $x_0 \in [a; b]$

нүктесі үшін $\Phi'(x_0) = \left(\int_a^b f(u) du - F(x) \right)' \Big|_{x=x_0} = -F'(x_0) = -f(x_0)$, яғни

$$\left(\int_x^b f(u) du \right)' \Big|_{x=x_0} = -f(x_0). \quad (2')$$

(2) теңдікті жалтылауға болады: егер R нүктелерінде f үзіліссіз, ал φ мен ψ дифференциалданатын функциялар болса, онда

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(u) du \right)' = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) - f(\psi(x)) \cdot \psi'(x). \quad (2'')$$

2-теоремадан келесі маңызды тұжырымды аламыз.

$[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясының осы кесіндіде алғашқы φ сы бар және оның алғашқы функцияның бірі ретінде

$F(x) = \int_a^x f(u) du$ функциясын алуға болады:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(u)du + C, \quad x \in [a; b]. \quad (4)$$

Зер салыңыз! Келесі екі тұжырым пара-пар емес:

- 1) Функцияның Δ аралығында алғашқы функциясы бар;
- 2) функция Δ аралығында интегралданады.

Мысалы, $f(x) = \operatorname{sign} x$ функциясы $\Delta = [-1; 1]$ кесіндісінде **интегралданады**, бірақ оның осы кесіндіде **алғашқы функциясы жоқ**. Сонымен бірге, берілен кесіндіде **алғашқы функциясы бар**, бірақ онда Риман бойынша **интегралданбайтын** функция бар (төмендегі 3-мысалдан кейінгі ескертуге де зер салыңыз!).

8.1.4. Ньютон-Лейбниц формуласының анықталған интегралдарды есептеуге қолданылуы.

Егер $[a; b]$ кесіндісінде f үзіліссіз функция, ал $\Phi(u)$ оның осы кесіндідегі қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_a^b f(u)du = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b. \quad (1)$$

(1) теңдік **Ньютон-Лейбниц формуласы** деп аталатын еді. Оны басқа тәсілмен де дәлелдеуге болатынын көрсетейік:

$$\nabla \quad F(x) = \int_a^x f(u)du, \quad x \in [a; b] \quad \text{функциясы } f \text{ функциясының}$$

алғашқы функциясы болғандықтан келесі теңдік орындалады

$$\Phi(x) = F(x) + C. \quad (2)$$

Енді $F(a) = \int_a^a f(u)du = 0$ теңдігін ескерсек, онда

$$\begin{aligned} \Phi(b) - \Phi(a) &\stackrel{(2)}{=} [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a) = \\ &= \int_a^b f(u)du - \int_a^a f(u)du = \int_a^b f(u)du, \end{aligned}$$

яғни (1) теңдікті аламыз. $\blacktriangle$

1-мысал. $\int_1^2 (2\sqrt{x} - 3)dx = 2\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int_1^2 dx = 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 - 3x \Big|_1^2 =$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{8} - 1) - 3(2 - 1) = \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1) - 3;$$

2-мысал.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2;$$

Функцияның берілген аралықта алғашқы функциясы болмаса, Ньютон-Лейбниц формуласын пайдалана алмаймыз. Онда басқа тәсілдерге көшуге мәжбүрміз. Сондай тәсілдердің бірін келесі мысалмен көрсетейік.

3-мысал. Теңдікті дәлелдеу керек:

$$G(x) = \int_{-1}^x \text{sign}(u) du = |x| - 1, \quad x \in [-1, 1]. \quad (3)$$

▼ Мұндағы $\text{sign} x = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ функциясы $x = 0$ нүктесінен

басқа нүктелерде үзіліссіз. Ал $x \in [-1, 0)$ нүктелері үшін $\text{sign} x = -1$ үзіліссіз функция, сондықтан $[-1; 0)$ жартылай аралығына (1) формуланы қолдана аламыз:

$$G(x) = \int_{-1}^x \text{sign} u du = \int_{-1}^x (-1) du = -u \Big|_{-1}^x = -x - 1, \quad -1 \leq x < 0. \quad (4)$$

Берілген $[-1, 1]$ кесіндісінде $\text{sign} x$ функциясы монотонды және шенелген, демек, ол осы кесіндіде интегралданатын функция (8.1, 1-ескертуді қараңыз). Олай болса, 1-теорема бойынша $G(x)$ функциясы

$[-1,1]$ кесіндісінде үзіліссіз. Сондықтан $x=0$ нүктесі үшін

$$G(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \int_{-1}^x (-1) du = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1 - x) = -1, \quad (5)$$

яғни $G(0) = \int_{-1}^0 \text{sign} u du = 0 - 1$.

Енді $x \in (0, +1]$ нүктелері үшін есептейміз:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-1}^x \text{sign} u du = \int_{-1}^0 \text{sign} u du + \int_0^x \text{sign} u du = -1 + \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \int_a^x 1 du = \\ &= -1 + \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} (x - a) = x - 1, \quad 0 < x \leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

(4) – (6) теңдіктерден (3) теңдік шығады. ▲

Теорема (анализдің негізгі теоремасы). Егер $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде интегралданып, $F(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз, сонымен бірге осы кесіндінің ең болмағанда ақырлы санды нүктелерінен басқа нүктелерінде оның $f(x)$ -ке тең туындысы бар

болса, онда келесі теңдік орындалады: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Мысалы, $F(x) = |x|$ функциясы $[-1, 1]$ кесіндісінде үзіліссіз және $x \neq 0$ нүктелерінде $|x|' = \text{sign} x$. Олай болса, *анализдің негізгі теоремасы* бойынша, $G(x) = \int_{-1}^x \text{sign}(u) du = |u|_{-1}^x = |x| - 1$ аламыз.

1-теорема (айнымал ауыстыру). Егер $x = \varphi(t)$ функциясы $[c, d]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын және $a = \varphi(c)$, $b = \varphi(d)$, сонымен бірге $\varphi([c, d]) = [a; b]$ кесіндісінде $f(x)$ үзіліссіз функция болса, онда келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (7)$$

▼ $F(x)$ және $\Phi(t)$ сәйкес $f(x)$ және $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ функцияларының алғашқы функциялары болсын. Онда $F_t'[\varphi(t)] = F_\varphi' \cdot \varphi_t'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, ал бұдан $\Phi(t) = F[\varphi(t)] + C$. Олай болса,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F[\varphi(d)] - F[\varphi(c)] = \Phi(d) - \Phi(c) = \int_c^d f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

1-мысал. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t, \quad dx = a \cos t dt \\ x_1 = 0, \quad t_1 = 0 \\ x_2 = a, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

Келесі теңдіктер анықталған интегралды есептеуде жиі пайдаланылады:

1) Егер f жұп функция болса ($f(-u) = f(u)$), онда

$$\int_{-a}^a f(u)du = 2 \int_0^a f(u)du. \quad (8)$$

2) Егер f тақ функция болса ($f(-u) = -f(u)$), онда

$$\int_{-a}^a f(u)du = 0. \quad (9)$$

3) Егер f функциясы $2l$ периодты болса, онда

$$\int_0^{2l} f(x)dx = \int_a^{2l+a} f(x)dx. \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangledown \quad 1) \quad \int_{-a}^a f(u) du &= \int_{-a}^0 f(u) du + \int_0^a f(u) du = \left| \begin{array}{l} u = -x \quad du = -dx \\ u_1 = -a, \quad x_1 = a \\ u_2 = 0, \quad x_2 = 0 \end{array} \right| = \\
 &= -\int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(u) du = |f(-x) = f(x)| = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^a f(u) du = \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(u) du = 2 \int_0^a f(u) du.
 \end{aligned}$$

(9) теңдік те осындай айнымал ауыстыру арқылы дәлелденеді;

(10) теңдікті дәлелдейік:

$$\int_a^{2l+a} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{2l} f(x) dx + \int_{2l}^{2l+a} f(x) dx. \quad (11)$$

Үшінші қосылғыштағы интегралға $x = u + 2l$ ауыстыруын жасайық. Онда $x_1 = 2l$, $u_1 = 0$; $x_2 = 2l + a$, $u_2 = a$ және $dx = du$

болады да, $\int_{2l}^{2l+a} f(x) dx = \int_0^a f(u + 2l) du = \int_0^a f(u) du = -\int_a^0 f(u) du$ аламыз.

Бұл өрнекті (11) теңдіктің оң жағындағы үшінші қосылғыш орнына

қойсақ, (10) теңдікті аламыз: $\int_{2l}^{2l+a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^{2l} f(x) dx -$

$$-\int_a^0 f(u) du = \int_0^{2l} f(x) dx. \quad \blacktriangle$$

2-мысал. $\int_{-2}^2 (2x^7 + x^5) |x| \cos 9x \, dx = 0$, өйткені тақ функция мен

жұп функция көбейтіндісі тақ функция болатыны бізге белгілі. $(2x^7 + x^5)$ -тақ, ал $\cos 9x \cdot |x|$ – жұп функция (тексеріңіз). Олай болса,

(9) теңдік бойынша тақ функцияның симметриялы $[-2; 2]$ кесіндісіндегі интегралы нөлге тең.

3-мысал.

$$\begin{aligned}\int_0^{4\pi} \sin^7 x \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \sin^7 x \cdot dx + \int_{0+2\pi}^{2\pi+2\pi} \sin^7 x \cdot dx = \int_0^{2\pi} \sin^7 x \cdot dx + \int_0^{2\pi} \sin^7 x \cdot dx = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin^7 x \cdot dx = 2 \int_{0-\pi}^{2\pi-\pi} \sin^7 x \cdot dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \cdot dx = 0.\end{aligned}$$

2-теорема. Егер $[a, b]$ кесіндісінде $u(x)$, $v(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болса, онда **бөліктен интегралдау формуласы** деп аталатын мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx. \quad (12)$$

▼ $u(x)v(x)$ көбейтіндісінің $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз туындысы бар $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Олай болса Ньютон-Лейбниц

формуласы бойынша $\int_a^b [u(x) \cdot v(x)]' dx = \int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx$

немесе $u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$, ал бұдан (12)

теңдікті аламыз. ▲

4-мысал. Есептеу керек: $\int_0^1 \ln(1+x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \quad dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x} dx \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 - x\Big|_0^1 + \ln(1+x)\Big|_0^1 = \\ &= \ln 2 - 1 + \ln 2 - \ln 1 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1.\end{aligned}$$

3-теорема (орта мән туралы). $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы үшін

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a; b], \quad (13)$$

теңдігі орындалатындай $\xi \in (a, b)$ нүктесі табылады.

Бұл теңдіктегі $f(\xi)$ саны $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі **орта мәні** деп аталады.

▼ f үзіліссіз болғандықтан, оның Φ алғашқы функциясы бар сондықтан

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b). \quad \blacktriangle$$

5-мысал. $\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{16}{4} - 0 = 4$ болғандықтан, мұндағы

$f(x) = x^3$ функцияның $[0, 2]$ кесіндісіндегі **орта мәні**

$f(\xi) = \xi^3 = \frac{1}{2-0} \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, және ол мәнге $\xi = \sqrt[3]{2}$ нүктесінде ие

болады. Сөйтіп, $x = 0$, $x = 2$, $y = x^3$ қисықтарымен шенелген қисық сызықты трапецияның ауданы қабырғасы $f(\xi) = b - a = 2$ тең квадраттың ауданымен бірдей болып шықты.