Он бірінші лекция

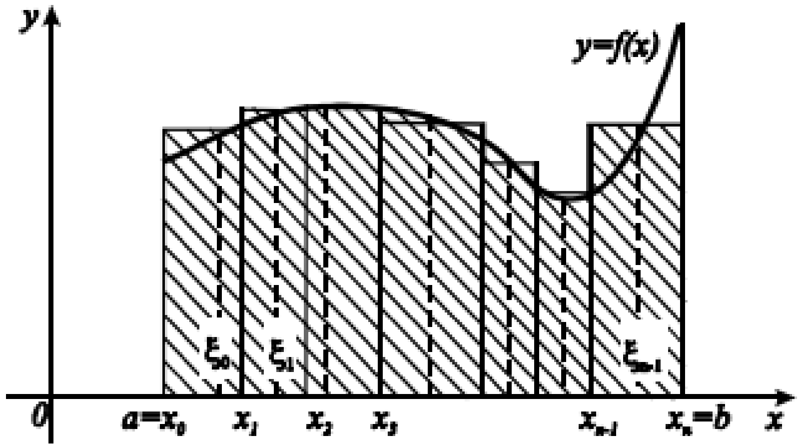
§ 8.1. Анықталған интеграл ұғымына әкелетін есептер. Анықталған интеграл және оның қасиеттері

8.1.1. Геометриялық және физикалық есептер. Анықталған интеграл анықтамасы

I-есеп. $[a,b]$ кесіндісінде (a мен b – ақырлы сандар) үзіліссіз $f(x) \geq 0$ функциясы берілсін.

А) «$y = f(x)$ қисығымен, Ox өсімен және $x = a$, $x = b$ түзулерімен шенелген фигураның ***ауданы***» деген ұғымды анықтау керек (67-сурет);

Ә) ***осы S ауданды табу керек***.



67-сурет

▼ Есепте аталған фигураны **қисықсызықты трапеция** дейді. Бұл есепті шығару үшін келесі амалдарды орындаймыз:

а) $[a,b]$ кесіндіні **кез келген** $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нүктелермен n бөлікке бөлеміз:

$$[a,b] = [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}; x_n] = \bigcup_{j=0}^{n-1} [x_j; x_{j+1}].$$

б) әрбір $[x_j;x_{j+1}]$ бөлікше кесіндіден <u>**кез келген**</u> ξ_j нүктесін аламыз $\xi_j \in [x_j;x_{j+1}]$, $j=0,1,...,n-1$, және осы нүктелерге сәйкес $f(\xi_j)$ функция мәндерін тауып, келесі қосындыны құрамыз:

$$S_n = f(\xi_0)(x_1-x_0)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+...+f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)=\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j, \qquad \Delta x_j = x_{j+1}-x_j\,.$$

Алынған өрнек $f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндідегі **интегралдық қосындысы** деп аталады. Оның әрбір қосылғышы:

$$f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)=f(\xi_j)\Delta x_j\,,\quad j=0,1,...,n-1,$$

– табаны $\Delta x_j = x_{j+1}-x_j$, биіктігі $f(\xi_j)$ болатын тік төртбұрыш ауданына тең, ал S_n саны қисықсызықты трапеция ауданына белгілі бір дәлдікпен жуықтайды: $S_n \approx S$. Бұл жуық теңдік дәлірек болуы үшін **барлық** $[x_j;x_{j+1}]$, $j=0,1,...,n-1$, бөлікше кесінділерді мейлінше ұсақтай түсу керек екені түсінікті;

в) Ұзындығы ең үлкен бөлікше кесіндіні нөлге ұмтылдырып $\max\limits_{j=0,1,\cdots,n-1} \Delta x_j \to 0$ (онда барлық Δx_j нөлге ұмтылады) S_n қосындының шегін аламыз:

$$S=\lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j\,. \tag{1}$$

Мұндағы S саны қисықсызықты трапецияның **ауданы** деп аталады:

Сонымен I-есептің екі сұрағына да жауап алдық. ▲

II-есеп. x өсіндегі $[a,b]$ кесіндісін – сызықтық біртекті емес стержень (желі) ретінде қарастырайық . Оның массасының үлестіру тығыздығы $\rho(x)$ – үзіліссіз функция болсын. Осы стерженьнің массасын анықтау керек.

▼ **а)** Стерженьді ***<u>кез келген</u>*** $a = x_0 < x_1 < ..., < x_n = b$ нүктелерімен n бөлікке бөліктейміз: $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1}[x_j; x_{j+1}]$;

б) Әрбір $[x_j; x_{j+1}]$ бөліктен <u>кез келген</u> ξ_j нүктесін $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = 0,1,...,n-1$ алып, келесі интегралдық қосындыны құраймыз: $\mathrm{M}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \rho(\xi_j)\Delta x_j$. Ал $[x_j; x_{j+1}]$ аралығында $\rho(x)$ функциясының өзгеруі шамалы ғана болатындықтан, стерженьнің $[x_j; x_{j+1}]$ кесіндісіне сәйкес массасының жуық мәні $\rho(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$ тең болғандықтан, M_n қосындысы бүкіл стерженнің массасын жуықтайды;

в) Стерженьнің массасының дәл мәнін, ұзындығы ең үлкен бөлікше кесіндіні нөлге ұмтылдыра отырып, M_n интегралдық қосындының шегіне өту арқылы аламыз:

$$\mathrm{M} = \lim_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ i=1,...,n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(\xi_j)\Delta x_j \,, \; \Delta x_j = x_{j+1} - x_j \,. \qquad (2)$$ ▲

Осы сияқты, қандай да бір дене f күшінің әсерінен $[a;b]$ аралығында түзу сызықпен қозғалғандағы A жұмысын анықтауға болады: $A = \lim_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=1,...,n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$.

Тағы да басқа көптеген физикалық есептерді осы тәсілмен шешуге болады.

Бұл есептер бізді $[a;b]$ кесіндісінде берілген, тегі әртүрлі функцияларға жасалатын бір ғана математикалық амалға алып келіп отыр. Бұл амал **функцияны кесіндіде интегралдау** деп, ал оның нәтижесі **функцияның кесіндідегі анықталған интегралы** деп аталады. Енді жалпы жағдайға көшейік, **I-есеп**тегі үзіліссіз және теріс емес функцияға жасалған үш амалды сипаты кез келген функция үшін қайталайық.

$[a;b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясы берілсін.

а) $[a;b]$ кесіндісін ***кез келген*** $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ нүктелерімен $[x_j, x_{j+1}]$, $i = 0,1,...,n-1$, бөліктерге бөлеміз (оны R бөліктеуі деп атайық);

б) Әрбір $[x_j; x_{j+1}]$ бөліктен ***кез келген*** $\xi_j \in [x_j; x_{j+1}]$ нүктелерін алып, *f* ***функциясының R бөліктеуіне сәйкес интегралдық қосынды*** деп аталатын

$$S_R(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j , \quad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j$$

қосындыны құрамыз;

в) $\max\limits_{j=0,1,...,n-1} \Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып, интегралдық қосындының шегіне өтеміз.

Егер бұл ***шек бар болса***, онда ол f ***функциясының*** $[a;b]$ ***кесіндісіндегі Риман бойынша анықталған интегралы*** деп аталады да**,**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=0,...,n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j , \quad (a < b) \tag{3}$$

түрінде белгіленеді. Мұндағы a мен b сандары – анықталған интегралдың сәйкес ***төменгі*** және ***жоғарғы шегі*** деп аталады.

Назар аударыңыз. Анықтамада айтылған $[a;b]$ кесіндісін бөліктеуді де, ξ нүктесін таңдап алуды да ақырсыз көп тәсілдермен жасауға болады. Егер f функциясының интегралдық қосындысының шегі бар болса, онда ол осы тәсілдерге тәуелсіз (кез келген R бөліктеу мен ξ нүктелері үшін) бір санға ғана тең болуы керек. Бұл жағдай, әрине, f функциясының сипатына байланысты. Мысалы, егер f функциясы $[a;b]$ кесіндісінде ***үзіліссіз*** немесе ***монотонды*** болса, онда ***оның интегралдық қосындысының шегі бар.***

Жоғарыдағы анықтаманы үзіліссіз функциялар үшін француз математигі О.Л.Коши (1789-1857), ал жалпы жағдай үшін неміс математигі Б.Ф. Риман (1826-1866) енгізген.

(3) шек ***Риман интегралы,*** ал $f(x)$ функциясы ***Риман мағынасында интегралданатын функция*** деп аталады. Біз алдымызда, Риман интегралын тек интеграл деп атайтын боламыз.

(1)-(3) теңдіктерден мынадай қорытынды жасауға болады:

1) $y = f(x) \geq 0$ қисығымен, Ox өсімен, $x = a$, $x = b$ түзулерімен шенелген жазық фигураның S ауданы $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең: $S = \int_a^b f(x)dx$;

2) Ox өсінің $[a;b]$ кесіндісі бойымен орналасқан үлестіру тығыздығы $\rho(x)$ тең, біртекті емес стерженнің M массасы осы $\rho(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең: $\mathrm{M} = \int_a^b \rho(x)dx$.

3) Қандай да бір дене f күшінің әсерінен $[a;b]$ аралығында түзу сызықпен қозғалғандағы A жұмысы, f функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең: $A = \int_a^b f(x)dx.$

Анықталған интегралды оның анықтамасы арқылы есептеу оңай жұмыс емес. Сондықтан анықталған интегралды есептеудің басқа тәсілін табу қажет болды. Бұл бағытта ағылшын физигі И.Ньютон (1643-1723) және неміс математигі Г.В.Лейбниц (1646-1716) шешуші жұмыс атқарды. Олар математикалық анализдің маңызды ұғымдары – интеграл мен туындыны байланыстыратын теореманы дәлелдеді. Оның түйіні мынау: егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал $F(x)$ оның осы кесіндідегі қандай да бір алғашқы функциясы ($F'(x)=f(x)$) болса, онда ***Ньютон-Лейбниц формуласы*** деп аталатын келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Жоғарыда ескерткеніміздей, $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз функцияның интегралданатын функция болатындығын пайдаланып (4) формуланы дәлелдеу қиын емес.

▼ Шынында да, бұл жағдайда $[a;b]$ кесіндісіне кез келген R бөліктеуін $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ жасап, одан соң

$$F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=F(x_n)-F(x_{n-1})+F(x_{n+1})-...-$$

$$-F(x_1)+F(x_1)-F(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[F(x_{k+1})-F(x_k)\right]=\Big| \quad [x_k, x_{k+1}]$$

кесіндісінде үзіліссіз $F(x)$ функциясына Лагранж теоремасын қолданамыз $\Big| = \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_{k+1}-x_k,$ аламыз. Бұл теңдіктен $\max\limits_{i=0,...,n-1} \Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып шекке өтсек, теңдіктің сол жақ бөлігі тұрақты санның шегі, ал оң жақ бөлігінің шегі бар (жоғарыдағы ұйғарым бойынша) және ол $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең болады, яғни (4) теңдікті аламыз. ▲

Мысалы, $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

Дәлелдеусіз келесі теореманы келтіреміз (оны да, мысалы, [2] кітаптан қарауға болады).

Теорема. $[a;b]$ *кесіндісінде* ***шенелмеген*** *функция осы кесіндіде (Риман бойынша) интегралданбайды*.

Ендеше, $[a;b]$ ***кесіндісінде интегралданатын функция осы кесіндіде шенелген*** ($A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ контрапозиция заңы). Бірақ, бұған кері тұжырым дұрыс емес, яғни ***функцияның*** $[a;b]$ ***кесіндісінде шенелгендігі оның осы кесіндіде интегралдануына жеткіліксіз.***

Мысалы, $\psi(x)=\begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал болса}, \\ -1, & \text{егер } x \text{ иррационал болса} \end{cases}$

функциясы кез келген $[a;b]$ кесіндісінде *шенелген*: $|\psi(x)|=1$. Бірақ ол $[a;b]$ кесіндісінде ***Риман мағынасында*** *интегралданбайды.* Шынында да, $\psi(x)$ функциясының интегралдық қосындысындағы ξ_j нүктелерін рационал сандар етіп таңдасақ, онда $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi(\xi_j)\Delta x_j=\sum\limits_{i=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_j=b-a$; ал ξ_j нүктелерін иррационал сандар етіп таңдасақ, онда $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi(\xi_j)\Delta x_j=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)\cdot\Delta x_j=$

$=-(b-a)=a-b$ алар едік. Яғни интегралдық қосындының шегі, ξ_j нүктелерін алу тәсіліне тәуелді әртүрлі сандар болады екен. Демек, ψ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданбайды.

Сонымен, *функция берілген кесіндіде Риман бойынша **интегралдануы үшін** оның осы кесіндіде **шенелген** болуы **қажет*** **!**

8.1.2. Анықталған интегралдардың қасиеттері.

1°. Егер $\forall x\in[a;b]$, $f(x)\equiv1$ болса, онда

$$\int_a^b dx=b-a. \tag{5}$$

Шынында да, $[a,b]$ кесіндісінің кез келген R бөліктеуі үшін

$$\delta_R=\sum_{j=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_j=\sum_{j=0}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots$$

$$\dots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=b-a.$$

2°. Егер $[a;b]$ кесіндісінде f және g интегралданатын функциялар, ал A, B кез келген сандар болса, онда

$$\int_a^b[A\cdot f(x)+B\cdot g(x)]dx=A\int_a^b f(x)dx+B\int_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

▼ Кез келген R бөліктеуі үшін

$$\sum_{i=0}^{n-1}[A\cdot f(\xi_j)+B\cdot g(\xi_j)]\Delta x_j=A\cdot\sum_{j=0}^{n-1}f(\xi_j)\Delta x_j+B\sum_{i=0}^{n-1}g(\xi_j)\Delta x_j$$

теңдігі орындалады. Бұдан $\max\limits_{i=0,...,n-1} \Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып шекке өтсек, (6) теңдікті аламыз. (6) теңдіктің $b \le a$ үшін де дұрыс екенін байқауға болады. ▲

Дербес жағдайда, $B=0$ болса, онда

$$\int_a^b A \cdot f(x)dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \tag{7}$$

ал $A=1,\ B=1$ болса, онда

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ . \tag{8}$$

Ескерту. Егер $f(x),\ g(x)$ функциялары $[a;b]$ кесіндісінде иинтегралданатын болса, онда $f(x)\cdot g(x)$ көбейтіндісі де осы кесіндіде интегралданады. Бірақ көбейтіндінің интегралы көбейт-кіштердің интегралдарының көбейтіндісіне тең бола бермейді:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \ \ne\ \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx\ .$$

Мысалы, $f(x)=x,\ g(x)=x^2,\ [a;b]=[0,1]$ деп алып, (4)-формуланы пайдалана отырып, осы айтылғанға көз жеткізіңіз.

Анықтама бойынша *a* нүктесінде берілген кез келген f функциясы үшін

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,, \tag{9}$$

ал $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын f функциясы үшін

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,, \quad b<a \tag{10}$$

деп аламыз. Бұл теңдіктерді геометриялық тұрғыдан көру қиын емес. Шынында да, бірінші жағдайда қисық сызықты трапеция $[0, f(a)]$ кесіндісіне айналады да, оның ауданы нөлге тең болады; екінші жағдайда кесіндіні бөліктеу нүктелері үшін $a = x_0 > x_1 > ... > x_{n-1} > x_n = b$ орындалады $(b < a)$ және әрбір Δx_j үшін $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j < 0$, $i = 0,1,...,n-1$ болатынын ескеру керек.

3º. (*анықталған интегралдың аддитивтік қасиеті*). Егер кез келген a,b,c сандары үшін әрбір $[a;b]$ $[a,c]$ және $[c,b]$ кесінділерінде *f* интегралданатын функция болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{11}$$

теңдігі орындалады.

▼ **1)** $a < c < b$ болсын. $[a;b]$ кесіндісін *c* нүктесі бөліктеу нүктесі $c = x_m$ болатындай етіп, *R* бөліктеуін жасайық:

$R: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c < ... < x_n = b.$

Осы *R* бөліктеуінен $[a,c]$ мен $[c,b]$ кесінділерінің

$$R_1: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c$$

$$R_2: \quad c = x_m < x_{m+1} < ... < x_n = b$$

бөліктеулері пайда болады. Олай болса

$$\delta_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j = \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{j=m}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j = \delta_{R_1} + \delta_{R_2}.$$

Бұдан $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=0,...,n-1}} \delta_R = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=0,...,m-1}} \delta_{R_1} + \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_j \to 0 \\ j=m,...,n-1}} \delta_{R_2}$ теңдігін жаза аламыз.

3º қасиеттің шарты бойынша бұл үш шектің үшеуі де бар, сондықтан соңғы теңдік (11) теңдік түрінде жазылады.

2) $a < b < c$ болсын. Онда (11) теңдік бойынша

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, ал бұдан (10) теңдікті ескеріп,

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ аламыз.

a,b,c нүктелерінің қалған жағдайлары да осы сияқты дәлелденеді. ▲

Ескерту. 3° қасиеттің орындалуы үшін $f(x)$ функциясы $[a;b]$, $[a,c]$, $[c,b]$ кесінділерінің ең үлкенінде интегралдануы жеткілікті.

4º. Егер $[a,b]$ кесіндісінде *f, g* интегралданатын функциялар болса және $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \le g(x)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\,, \quad a \le b. \tag{12}$$

▼ Кез келген *R* бөліктеуі үшін $\Delta x_j \ge 0$ екенін ескеріп,

$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j \le \sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j)\Delta x_j$ аламыз. Бұл теіңсіздіктен $\max \Delta x_j \to 0$ ұмтылдырып (12)-теңсіздікті аламыз. ▲

Дербес жағдайда, егер f теріс емес, $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын функция болса, онда $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b 0dx = 0$, $a \le b$, яғни $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \ge 0$ үшін

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0\,, \ a \le b. \tag{13}$$

5º. Егер *f,* $|f|$ функцилары $[a;b]$ кесіндісінде интеграл-данатын болса, онда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \tag{14}$$

▼ $\forall x \in [a,b]$ нүктелері үшін $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ теңсіз-діктері орындалатыны айқын. Бұдан (12) және (7) қатыстарды пайдаланып,

$$\int_a^b \left[-|f(x)|\right]dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx\,, \quad a \le b,$$

немесе $$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad a \le b,$$

яғни $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|, \; a \le b,$$ аламыз.

Егер $a > b$ болса, онда осы соңғы теңсіздік пен (10) теңдікті пайдаланамыз:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|-\int_b^a f(x)dx\right| = \left|\int_b^a f(x)dx\right| \le \left|\int_b^a |f(x)|dx\right| =$$

$$= \left|-\int_a^b |f(x)|dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

аламыз. ▲

Дәлелдеу барысында алынған

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad a \le b. \tag{14′}$$

теңсіздігі, математикада жиі пайдаланылады.

Бұл теңсіздікті (13) және (14) теңсіздіктерден де алуға болатынына назарыңызды аударамыз.

Ескерту. Егер f функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданса, онда $|f|$ функциясы да осы кесіндіде интегралданады ([2] қараңыз). Бірақ, керісінше, $|f|$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданса, f функциясы да осы кесіндіде интегралданады деп айта алмаймыз.

Мысалы, жоғарыда $\psi(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рационал,} \\ -1, & x - \text{иррационал} \end{cases}$

функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданбайтынын көрсеткен едік. Ал $|\psi(x)| \equiv 1$, $x \in [a;b]$, функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданады.

1-теорема. Кесіндінің бір нүктесінен басқа нүктелерінде нөлге тең функцияның осы кесіндідегі анықталған интегралы нөлге тең. Басқаша айтқанда,

$$\psi_c(x)=\begin{cases}0, & x\in[a;b]\setminus\{c\}\\ A, & x=c\end{cases} \tag{15}$$

функциясы үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b \psi_c(x)dx=0. \tag{16}$$

▼ $[a;b]$ кесіндісіне кез келген R бөліктеуін жасайық R: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Ал c нүктесі осы бөліктердің біреуінің, айталық, $[x_m, x_{m+1})$ бөлігінің ішінде жатсын ($x_m\le c<x_{m+1}$). Онда

$$\delta_R=\sum_{j=0}^{n-1}\psi_c\left(\xi_j\right)\Delta x_j=\psi_c\left(\xi_{m-1}\right)\Delta x_{m-1}+\psi_c\left(\xi_m\right)\Delta x_m.$$

$\forall x\in[a,b]$ нүктелері үшін $\left|\psi_c(x)\right|\le|A|$ болатындықтан,

$$\left|\delta_R\right|=\left|\psi_c(\xi_{m-1})\Delta x_{m-1}+(\psi_c(\xi_m)\Delta x_m\right|\le$$

$$\le \quad \left|\Delta x_j>0 \text{ ескерсек}\right| \quad \le \quad \left|\psi_c(\xi_{m-1})\right|\cdot\Delta x_{m-1}+$$

$$+\left|\psi_c(\xi_m)\right|\Delta x_m\le |A|\cdot(\Delta x_{m-1}+\Delta x_m) \;\to\; |A|\cdot 0, \quad \max_{j=0,...,n-1}\Delta x_j\to 0,$$

яғни (16) теңдік орындалады. ▲

Салдар. $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын f функциясының $c\in[a,b]$ нүктесіндігі мәнін өзгерткеннен оның анықталған интегралы өзгермейді, яғни оның $c\in[a;b]$ нүктесіндігі мәнін өзгерткеннен кейін алынған f_1 функциясы үшін $\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ теңдігі орындалады.

▼ f функциясын жалғыз c нүктесінде өзгерту, оған $\psi_c(x)$ функциясын ((15)-қараңыз) қосу деген сөз: $f_1(x)=f(x)+\psi_c(x)$. Олай болса осы теңдіктен (8) және (16) теңдіктерін ескеріп,

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \psi_c(x)dx = \int_a^b f(x)dx + 0$$

аламыз. ▲

Салдардан, f функциясының интегралдануы оның белгілі бір нүктеде қандай мән қабылдайтынына тәуелді емес екенін көреміз. Мысалы, $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$ және $g(x) = 1$ функцияларының әртүрлі мәндері тек $x = 0$ нүктесінде ғана. Олай болса,салдар бойынша, кез келген $[a;b]$ кесіндісінде $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a$ аламыз.

2-теорема. f функциясы $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын теріс емес функция болсын. Егер f функциясы $c \in [a;b]$ нүктесінде үзіліссіз және $f(c) > 0$ болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx > 0\,, \quad a < b. \tag{17}$$

▼ $c \in [a,b]$ деп алайық. Онда

$$f(x) > \frac{f(c)}{2}, \quad \forall x \in [c - \delta, \ c + \delta], \tag{18}$$

орындалатын $[c - \delta, c + \delta]$ кесіндісі табылатынын көрсетейік.

Шынында да, f функциясы c нүктесінде үзіліссіз болғандықтан, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, басқаша айтқанда, $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$ саны арқылы $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > |f(c) - f(x)|$, $\forall x \in [c - \delta, c + \delta]$ немесе $f(c) - \frac{f(c)}{2} < f(x) < f(c) + \frac{f(c)}{2}$, $\forall x \in [c - \delta, c + \delta]$ орындалатындай $[c - \delta, \ c + \delta]$ кесіндісі табылады. Бұл теңсіздіктердің сол жақ бөлігі

(18) теңсіздікті береді. Онда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx +$ $+ \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$ қосындысындағы қосылғыштар үшін

$$\int_a^{c-\delta} f(x)dx \geq 0, \quad \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \geq 0,$$

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx > \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}dx = \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta = f(c) \cdot \delta > 0$$

теңсіздіктері орындалатындықтан, $\int_a^b f(x)dx > 0$ аламыз.

Егер $c=a$ немесе $c=b$ болса, онда $[c-\delta, c+\delta]$ кесіндісінің орнына сәйкес $[a, a+\delta]$, $[b-\delta, b]$ кесінділері алынады. ▲