

Оныншы лекция

Рационал функцияларды интегралдау

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ түріндегі өрнекті n -дәрежелі көпмүшелік деп атайды. Мұндағы $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - нақты сандар ($a_n \neq 0, n > 0$). Көпмүшеліктердің қатынасы түрінде берілген өрнек рационал өрнек болады.

Мысалы $\frac{3x-1}{x^2+1}$, $\frac{x^3-5x^2+1}{x-1}$ бөлшектер рационал өрнектер.

Егер бөлшектің алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшелік дәрежесінен кем болса, бөлшек дұрыс деп, ал кем болмаса бөлшек бұрыс деп аталады. Мысалдағы біріншісі бөлшек - дұрыс, ал екіншісі – бұрыс бөлшек.

Кез келген бұрыс бөлшекті алымын бөлімге бөлу арқылы дұрыс бөлшекке келтіріп алуға болады.

Мысалы, $\frac{x^3-5x^2+1}{x-1}$ бөлшекті дұрыс бөлшекке келтірейік:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 1 \overline{) x - 1} \\ x^3 - x^2 \overline{) x^2 - 4x - 4} \\ -4x^2 + 1 \overline{) -4x^2 + 4x} \\ -4x + 1 \overline{) -4x + 4} \\ -4x + 4 \overline{) -4x + 4} \\ -3 \end{array}$$

Сонымен, берілген бөлшектің бүтін бөлігін бөліп дұрыс бөлшекке келтірдік:

$$\frac{x^3-5x^2+1}{x-1} = x^2 - 4x - 4 - \frac{3}{x-1}.$$

Мектеп курсынан көпмүшеліктің мынадай қасиеті белгілі: Кез келген көпмүшелікті $(x-a)^\alpha$ және $(x^2+px+q)^\beta$ түріндегі көбейткіштерге жіктеуге болады.

Мынадай тұжырым дұрыс болады: ***Егер дұрыс рационал бөлшек бөлімі $(x-a)^\alpha$ және $(x^2+px+q)^\beta$ түріндегі көбейткіштерге жіктелген болса, онда бөлшектімынадай қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеуге болады:***

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$

$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_\beta x+C_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}, \quad (2)$$

мұндағы, $P(x)$ – белгілі көпмүшелік, $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$, $B_1, B_2, \dots, B_\beta$, $C_1, C_2, \dots, C_\beta$ – белгісіз коэффициенттер. Ол коэффициенттерді табу үшін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланамыз: теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз; екі бөлшектің бөлімдері тең болатындықтан, алымдарын теңестіреміз; теңдіктің екі жағындағы x айнымалының бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін аламыз; осы жүйені шешіп белгісіз коэффициенттерді табамыз.

Мысалы $\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$ бөлшегін қарапайым

бөлшектер қосындысына жіктейік.

Бөлшек дұрыс, сондықтан (2) формула бойынша бөлшекті жіктейміз,

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Белгісіз коэффициенттерді табу үшін теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіріп жазайық:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A_1(x+1)(x^2-x+1) + A_2(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$$

Бөлімдері бірдей, алымдарын теңестіреміз (оң жақтағы бөлшек алымын ықшамдап, x -тің дәрежесі түрінде жазайық):

$$3x^2+2x+1 = (A_1+B)x^3 + (A_2+2B+C)x^2 + (-A_2+B+2C)x + A_1+A_2+C.$$

Теңдіктің екі жағындағы x айнымалының бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ A_2 + 2B + C = 3 \\ -A_2 + B + 2C = 2 \\ A_1 + A_2 + C = 1 \end{cases}$$

Төрт белгісізді, төрт теңдеуден тұрған жүйені шешіп, белгісіз коэффициенттерді табамыз:

$$A_1 = -\frac{2}{3}; \quad A_2 = \frac{2}{3}; \quad B = \frac{2}{3}; \quad C = 1.$$

Табылған мәндерді теңдіктегі орнына қойып, бөлшектің қарапайым жіктелуін аламыз:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} = -\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2}{3(x+1)^2} + \frac{2x+3}{3(x^2 - x + 1)}.$$

Енді осы рационал бөлшекті интегралдайық.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx &= \int \left(-\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2}{3(x+1)^2} + \frac{2x+3}{3(x^2 - x + 1)} \right) dx = \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{2x+3}{x^2 - x + 1} dx \end{aligned}$$

Әр интегралды жеке қарастырайық.

1) $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$, мұнда бөлшектің алымы бөлімінің туындысы болғандықтан 7-қасиетті пайдаландық.

$$2) \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \left\| \frac{x+1=t}{dx=dt} \right\| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x+1} + C;$$

$$3) \int \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx = \int \frac{(2x-1)+4}{x^2-x+1} dx = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{4dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{4d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln|x^2-x+1| + 4 \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \ln|x^2-x+1| + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

мұнда бірінші қосылғышты алымы бөлімінің туындысы болғандай етіп түрлендірдік те 7-қасиетті пайдаландық. Ал екінші қосылғышта бөлімінің толық квадратын бөліп алып, интегралдар кестесіндегі 14-формуланы пайдаландық.

Сонымен,

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx = -\frac{2}{3} \ln|x+1| - \frac{2}{3(x+1)} +$$

$$+ \frac{1}{3} \ln|x^2-x+1| + \frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Иррационал және тригонометриялық функцияларды интегралдау.

1. $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$ түріндегі интегралды қарастырайық.

Мұндағы иррационалдықты $t = \sqrt[n]{x}$ деген белгілеу енгізіп, рационал функцияға келтіруге болады.

Мысал.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\| = \int \frac{2t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2(t - \arctgt) + C = 2(\sqrt{x} - \arctg \sqrt{x}) + C.$$

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Қарапайым жағдайларда мұндай интеграл кестелі интегралға келтіріледі. Ол үшін квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып, айнымалыны алмастыру керек.

Мысал.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \left\| \begin{array}{l} 5+2x-x^2 = 6-(x-1)^2 \\ x-1=t \Rightarrow x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right\| = \int \frac{(t+1)dt}{\sqrt{6-t^2}} =$$

$$= \int \frac{t dt}{\sqrt{6-t^2}} + \int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} = \left\| \begin{array}{l} 6-t^2 = z \\ -2t dt = dz \\ t dt = -\frac{1}{2} dz \end{array} \right\| = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C = -\sqrt{z} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C = -\sqrt{6-t^2} +$$

$$+ \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C = -\sqrt{5+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Бұл интегралды $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$) - универсал алмастыру жасау арқылы рационал функцияны интегралдауға келтіреді. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$t = tg \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Мысал. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C.$

4. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Бұл интегралда екі жағыдай болуы мүмкін:

а) m немесе n сандарының біреуі тақ оң сан. Егер m – тақ сан болса $\cos x = t$ деген, ал егер n – тақ сан болса, $\sin x = t$ деген алмастыру жасалады.

б) m және n сандары жұп оң сан. Онда мынадай формулаларды пайдаланады:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).$$