

Тоғызыншы лекция

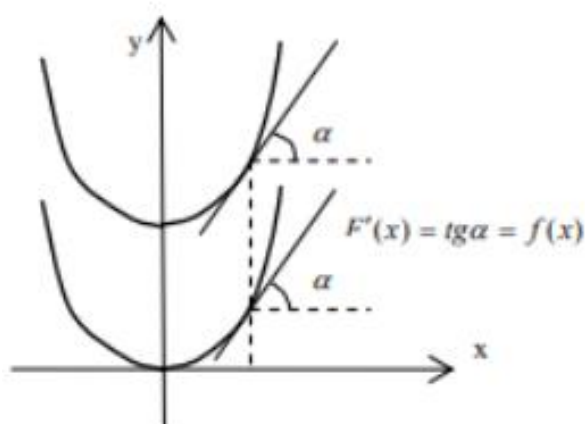
ИНТЕГРАЛ

Анықталмаған интеграл, қасиеттері. $f(x)$ және $F(x)$ функциялары ақырлы немесе ақырсыз X аралықта анықталған функциялар болсын.

Анықтама. X аралығында дифференциалданатын $F(x)$ функциясы теңдігін қанағаттандырса, $F'(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы деп аталады.

Мысалы, $F(x)=x^3$ функциясы $f(x)=3x^2$ функциясының алғашқы функциясы болады, себебі

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$$



$F'(x)$ туындының геометриялық мағынасы $y=F(x)$ функциясына x нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті. Сонда, $f(x)$ функцияның

алғашқы функциясын табу дегеніміз x нүктеде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициенті сол нүктедегі $f(x)$ функциясының мәніне тең болатын $y=F(x)$ қисығын табу деген сөз, яғни

$$F'(x) = \operatorname{tg} \alpha = f(x).$$

$f(x)$ функцияның алғашқы функциясы бірімәнді анықталмаған. Шынында да, мысалдағы $f(x)=3x^2$ функцияларының алғашқы функциялары ретінде мына функцияларды алуымызға болады: x^3+1 , x^3-5 , x^3+C , мұндағы C - қандай да бір нақты сан (себебі, бұл функциялардың туындысы $3x^2$ болады). Жалпы жағдайда айтсақ, $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы $y=F(x)$ табылса, онда $F(x)+C$ функциясы да $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы болады, себебі

$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$. Геометриялық тұрғыдан қарастырсақ, $F'(x) = \operatorname{tg} \alpha = f(x)$ шартын қанағаттандыратын бір $y = F(x)$ функция табылса, онда функция графигін Оу осі бойымен C шамаға жылжыту арқылы осы шартты қанағаттандыратын қисықтарды аламыз (бұлай жылжыту бұрыштық коэффициентті өзгертпейді).

Мынадай теорема дұрыс болады.

Теорема. *Егер X аралығында $F(x)$ және $\Phi(x)$ функциялары $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда қандай да бір C саны табылып, мына теңдік орындалады: $\Phi(x) = F(x) + C$.*

Бұл теоремадан егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x) + C$ өрнегі $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиынын береді.

Анықтама. $f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының жиыны $F(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп аталады және $\int f(x)dx$ деп белгіленеді, мұндағы $\int$ - интеграл белгісі; $f(x)$ – интеграл астындағы функция; $f(x)dx$ - интеграл астындағы өрнек. Сонымен,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1)$$

мұндағы $F(x)$ – алғашқы функция, C – ерікті тұрақты.

Мысалдағы, $f(x) = 3x^2$ функциясының алғашқы функциясы $F(x) = x^3$ болғандықтан, анықтама бойынша $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Берілген функцияның алғашқы функциясын табу амалы **функцияны интегралдау** деп аталады. Функцияны интегралдау амалы дифференциалдау амалына кері амал.

Интеграл анықтамасынан мынадай қасиеттер шығады.

$$1. \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

$$2. d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

3. $\int dF(x) = F(x) + C.$

4. Берілген аралықта $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының алғашқы функциялары бар болса, онда $f(x)+g(x)$ функциясының да алғашқы функциясы бар болады және

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx .$$

5. $\int kf'(x)dx = k \int f'(x)dx .$

6. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

7. Егер интеграл астындағы функцияның алымы бөлімнің туындысы болса, онда интеграл бөлімнің абсолют шамасының

наткрал логарифміне тең, яғни $\int \frac{u'dx}{u} = \ln|u| + C$, мұндағы $u=u(x)$.

ИНТЕГРАЛДАР КЕСТЕСІ

1	$\int 0 dx = C$	2	$\int 1 dx = x + C$
3	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0,$ $\alpha \neq -1$	4	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad x \neq 0$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ $0 < a \neq 1$	6	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C, \quad x \neq k\pi$

11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ $-1 < x < 1$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$ $-a < x < a$
13	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$	14	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
15	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + k} \right + C$

ИНТЕГРАЛДАУ ӘДІСТЕРІ

1. Бірден интегралдау. Белгілі формулалар көмегімен интегралды бір немесе бірнеше кестелік интегралға келтіруге болатын кезде қолданамыз. Мысалдар қарастырайық.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (x^2 - \sqrt[3]{7x} + 1) dx &= \int x^2 dx - \sqrt[3]{7} \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \sqrt[3]{7} \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + x + C = \frac{x^3}{3} + \sqrt[3]{7} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + x + C \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$\text{в) } \int (3x+4)^{17} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+4)^{18}}{18} + C = \frac{(3x+4)^{18}}{54} + C \quad (\text{6-қасиет бойынша есептелді}).$$

$$\text{г) } \int \frac{6x-7}{3x^2-7x+5} dx = \left\| \frac{(3x^2-7x+5)'}{3x^2-7x+5} = 6x-7 \right\| = \ln |3x^2-7x+5| + C.$$

болгандыктан

2. Айнымалыны алмастыру әдісі. $I = \int f(x) dx$ интегралын қарастырайық. Айталық, $x=g(t)$ дифференциалданатын функция болсын. Сонда $dx=g'(t)dt$ және

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt .$$

Бұл әдіс айнымалыны ұтымды алмастыруға негізделген. Айнымалыны алмастыру арқылы интегралды бірден немесе бірнеше амалдардан кейін кестелік интегралға келтіріледі. Мысалдар қарастырайық.

$$a) \int x e^{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt; \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$б) \int \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \left\| \begin{array}{l} x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt; \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \arctgt + C = \\ = \frac{1}{3} \arctgx^3 + C$$

$$в) \int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left\| 1 + \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \right\| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1 + \ln x| + C$$

3. Бөліктеп интегралдау әдісі. Бұл әдіс мынадай қатынасқа негізделген:

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

мұндағы $u=f(x)$ және $v=g(x)$ функциялары туындылары бар функциялар. Теңдіктің екі жағынан да интеграл алсақ,

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du ,$$

осыдан

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Бұл әдісті қолданғанда u және v функцияларын $\int v du$ интеграл $\int u dv$ интегралға қарағанда оңай алынатындай етіп таңдайды. Мысалдар қарастырайық.

$$a) \int x e^x dx = \left\| \begin{array}{l} x = u \Rightarrow du = dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C =$$

$$= e^x (x - 1) + C.$$

$$б) J = \int e^x \cos x dx = \left\| \begin{array}{l} \cos x = u \Rightarrow du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \sin x = u \Rightarrow du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\| = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

$$= e^x (\cos x + \sin x) - J.$$

$$J = e^x (\cos x + \sin x) - J \Rightarrow J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

Төмендегі интегралдар тобы тек бөліктеп интегралдау әдісімен есептелінеді:

$$\int x^n \ln x dx; \quad \int x^n \arcsin x dx; \quad \int x^n \arccos x dx; \quad \int x^n \arctg x dx.$$