

Сегізінші лекция

ТУЫНДЫ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

Лопиталь ережесі

$f(x)$ және $g(x)$ функциялары $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) жағдайда нолге немесе шексіздікке ұмтылсын. Егер олардың туындыларының қатынасының шегі (ақырлы не ақырсыз) бар болса, функциялар қатынасының да шегі бар болады және мына қатынас орындалады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Бірнеше мысал қарастырайық.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0.$$

Бұл мысалда Лопиталь ережесін бірден қолдануға келмейді. Сондықтан, алгебралық түрлендіру көмегімен $\{0 \cdot \infty\}$ түріндегі анықталмағандықты $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ немесе $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ түріндегі анықталмағандықтарға келтіреміз. Осы мақсатпен x^2 бөлімнің бөліміне түсірдік.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \{0^0\}. \text{ Айталық } A = \lim_{x \rightarrow 0} x^x, \text{ онда}$$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

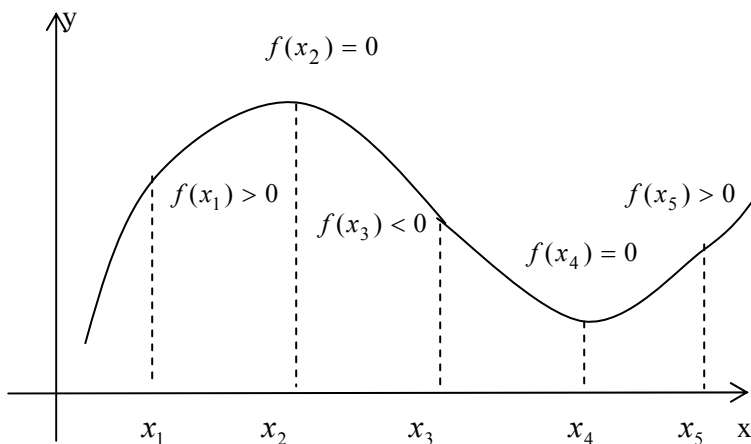
Енді $\ln A = 0$ теңдеуін шешіп ізделінді шекті табамыз:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1.$$

ТУЫНДЫНЫҢ ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУДЕГІ ҚОЛДАНЫСЫ

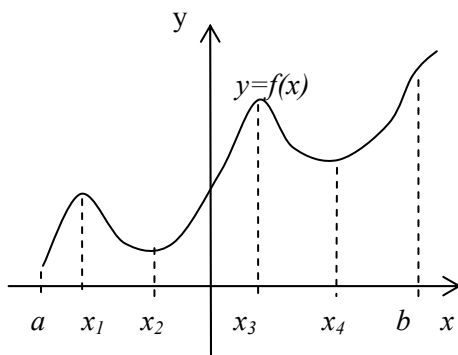
(a, b) интервалында анықталған $y=f(x)$ қарастырайық. Осы функцияның аралықта өсуі мен кемуінің анықтамасымен таныссыздар. Енді функцияның аралықта өсуі мен кемуінің қажетті және жеткілікті шарттарымен танысайық.

Теорема (функция өсуі мен кемуінің жеткілікті шарты).
Егер (a, b) интервалында дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясының туындысы оң болса, онда осы интервалда функция өспелі болады, ал туындысы теріс болса, функция кемімелі болады. 1-суреттегі $y=f(x)$ функциясы $(-\infty, x_2)$ және $(x_4, +\infty)$ аралығында өседі, (x_2, x_4) аралығында кемиді.



1-сурет

Анықтама. x_0 нүктесінің δ - маңайы табылып, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, осы маңайдағы барлық $x \neq x_0$ үшін $f(x) > f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының минимум нүктесі деп,



2-сурет

ал $f(x) < f(x_0)$ теңсіздік орындалса, x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының максимум нүктесі деп аталады.

Функцияның минимум және максимум нүктелерін экстремум нүктелері деп атайды. Осы нүктелердегі функция мәндерін функция экстремумдары дейді.

2-суретте $y=f(x)$

функциясының максимум нүктелері x_1 және x_3 , ал

минимум нүктелері x_2 және x_4 . Суреттен x_4 нүктедегі минимум x_1 нүктедегі максимумнан үлкен. Бұл функцияның экстремум ұғымы x_0 нүктесінің δ - маңайында ғана анықталатындығымен түсіндіріледі. Сондықтан да, функция экстремумы дегеннің орнына көбіне функцияның локальді экстремумы дейді.

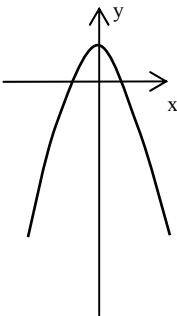
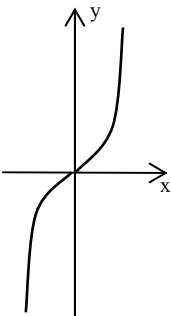
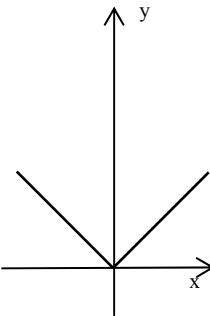
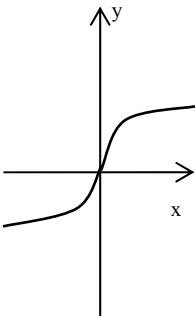
Экстремумның бар болуының қажетті шартын Ферма теоремасы береді.

Ферма теоремасы. x_0 нүктесі $y=f(x)$ функциясының экстремум нүктесі болып және осы нүктедегі $f'(x_0)$ функция туындысы бар болса, онда $f'(x_0)=0$.

Бұл теореманың геометриялық мағынасы: теорема шартын қанағаттандыратын нүктеде функция графигіне жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болады.

Анықтама. Туындысы нолге айналатын не туындысы болмайтын нүктелер функцияның күдікті нүктелері (кейде I-тексті күдікті нүктелер) деп аталады.

Кестеде төрт функцияның $x_0 = 0$ нүктедегі экстремумдары қарастырылған:

$y = 1 - x^2$	$y = x^3$	$y = x $	$y = \sqrt[3]{x}$
			
$y' = -2x$	$y' = 3x^2$	$y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y'(0) = 0$	$y'(0) = 0$	$y'(0)$ жоқ	$y'(0)$ жоқ
Экстремум бар	Экстремум жоқ	Экстремум бар	Экстремум жоқ

$x_0 = 0$ нүкте төрт функция үшін де күдікті нүкте болып табылады. Бірақ, күдікті нүктенің бәрінде экстремум бола бермейді екен (мысалы, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ функциялар). Қандай күдікті нүктеде экстремум бар болатынын экстремумның жеткілікті шарттары анықтайды.

Экстремумның бірінші жеткілікті шарты. $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және қандай да бір δ -маңайында функция туындысы бар болсын (x_0 нүктесінде туынды болмауы мүмкін). Онда,

- 1) егер x аргумент x_0 нүкте арқылы өткенде $f'(x)$ таңбасын оңнан теріске өзгертсе, онда x_0 нүкте максимум нүктесі болады;
- 2) егер x аргумент x_0 нүкте арқылы өткенде $f'(x)$ таңбасын терістен оңға өзгертсе, онда x_0 нүкте минимум нүктесі болады;
- 3) егер x аргумент x_0 нүкте арқылы өткенде $f'(x)$ таңбасын өзгертпесе, онда x_0 нүкте экстремум нүктесі емес.

Жоғары кестеде қарастырылған функцияларды осы жеткілікті шарт бойынша зерттесек. x аргумент $x_0 = 0$ нүкте арқылы өткен кездегі $f'(x)$ таңбасын анықтасақ, мынадай толықтыру аламыз:

$y = 1 - x^2$	$y = x^3$	$y = x $	$y = \sqrt[3]{x}$
Туынды таңбасы			
$y' : "+" \rightarrow "-"$ $x_0=0$	$y' : "+" \rightarrow "+"$ $x_0=0$	$y' : "-" \rightarrow "+"$ $x_0=0$	$y' : "+" \rightarrow "+"$ $x_0=0$
$x_0=0$ - максимум нүктесі	Экстремум жоқ	$x_0=0$ - минимум нүктесі	Экстремум жоқ

Экстремумның екінші жеткілікті шарты. $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және қандай да бір δ - маңайында екі рет дифференциалдансын. Сонымен қатар $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) \neq 0$ болса, онда

- 1) егер $f''(x_0) < 0$ болса, онда x_0 нүкте $f(x)$ функциясының максимум нүктесі болады;
- 2) егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда x_0 нүкте $f(x)$ функциясының минимум нүктесі болады.

ФУНКЦИЯ ГРАФИГІНІҢ ДӨҢЕСТІГІ ЖӘНЕ ИЛҮ НҮКТЕЛЕРІ

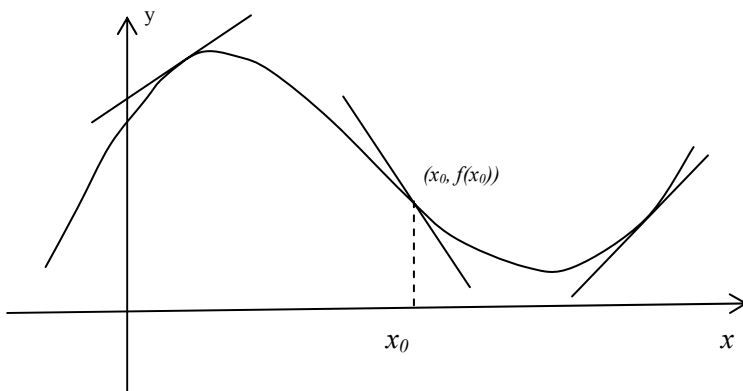
Анықтама. $y=f(x)$ функция графигі (a,b) интервалының кез келген нүктесінде жүргізілген жанамадан төмен жатса, онда функция **дөңес** (дөңестігі жоғары қараған) деп, ал жанамадан жоғары жатса, онда функция **ойыс** (дөңестігі төмен қараған) деп аталады.

3-суретте $y=f(x)$ функциясының графигі $(-\infty, x_0)$ аралығында дөңес болады да, ал $(x_0, +\infty)$ аралығында ойыс болады.

Анықтама. *Функция графигінің дөңес және ойыс бөліктерін бөліп тұратын нүктені функцияның **иілу нүктесі** деп атайды.* Суретте қисық бойында жатқан $(x_0, f(x_0))$ нүкте графиктің дөңес және ойыс бөліктерін бөліп тұр, яғни ол функцияның иілу нүктесі болады.

(a,b) интервалында екі рет дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясын қарастырайық.

Функция дөңестігінің жеткілікті шарты. *(a,b) интервалында $y=f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы теріс таңбалы болса, функция графигі осы аралықта дөңес, ал екінші туындысы оң таңбалы болса, функция графигі осы аралықта ойыс болады.*



3-сурет

Енді иілу нүктесін табуға мүмкіндік беретін қажетті және жеткілікті шарттарды қарастырайық.

Иілу нүктесі бар болуының қажетті шарты. *(a,b) интервалында екі рет дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясының $(x_0, f(x_0))$ нүктесі иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0) = 0$.*

Шынында да, $(x_0, f(x_0))$ иілу нүктесі болғандықтан x_0 нүктесінің оң және сол жағында $f''(x)$ таңбасы түрліше болады. Екінші туындының үзіліссіздігіне байланысты $f''(x_0) = 0$ болатындығы шығады.

Анықтама. Екінші туындысы нөлге айналатын не болмайтын нүктелер функцияның **II-текті күдікті нүктелері** деп аталады.

Иілу нүктесі бар болуының жеткілікті шарты. (a,b) интервалында екі рет дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясының екінші туындысы x аргумент x_0 нүкте арқылы өткенде таңбасын өзгертсе, онда $(x_0, f(x_0))$ нүктесі функцияның иілу нүктесі болады.

Мысал. $y = e^{-x^2}$ (Гаусс қисығы) функциясының иілу нүктелері мен дөңестік аралықтарын тап.

Шешуі. 1) Функция бүкіл сан осінде анықталған, яғни $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

2) Бірінші және екінші туындыларын табамыз:

$$y' = \left(e^{-x^2} \right)' = -2xe^{-x^2};$$

$$y'' = \left(-2xe^{-x^2} \right)' = -2(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}) = 2e^{-x^2} (2x^2 - 1).$$

3) II-текті күдікті нүктелерін $y'' = 0$ шартынан табамыз:

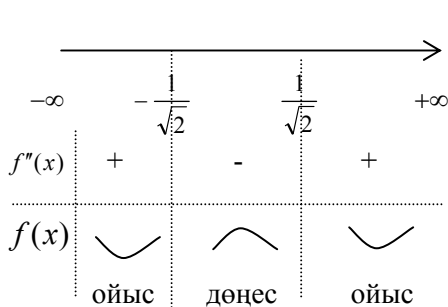
$2e^{-x^2} (2x^2 - 1) = 0$. $2e^{-x^2} > 0$ болғандықтан, $2x^2 - 1 = 0$. Осыдан

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ және $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ күдікті нүктелер табылады. Осы

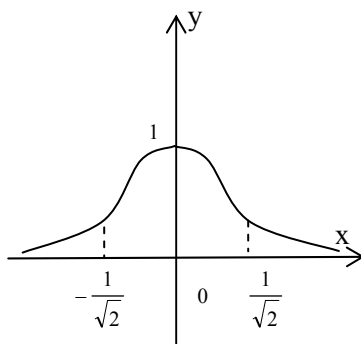
нүктелер анықталу облысын үш интервалға бөледі:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right).$$

Осы интервалдардағы екінші туынды таңбасын анықтаймыз (4-сурет):



4-сурет



5-сурет

Сонымен, функция графигі $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ және $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

аралықтарда ойыс, ал $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ аралықта дөңес болады екен.

Екінші ретті y'' туынды $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ нүктелерден өткенде таңбасын өзгертетіндіктен, бұл нүктелер функцияның иілу нүктелері болады. Функция графигі 5-суретте кескінделген.

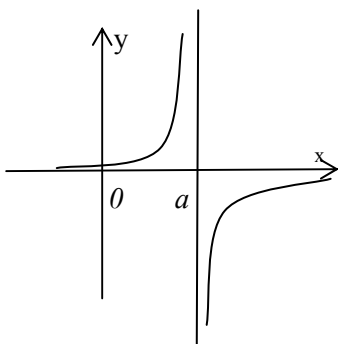
ФУНКЦИЯ ГРАФИГІНІҢ АСИМПТОТАЛАРЫ

Анықтама. Егер $y=f(x)$ функциясы үшін $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ және

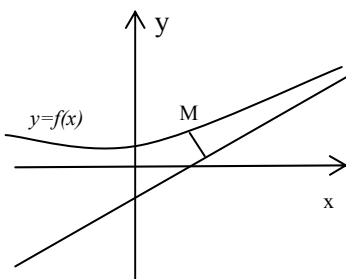
$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ шектерінің ең болмағанда біреуі шексіздікке тең болса,

онда $x = a$ функция графигінің **тік асимптотасы** деп аталады (6а-сурет).

$y=kx+b$ түзуі $y=f(x)$ функция графигінің **көлбеу асимптотасы** деп аталады, егер функцияға тиісті қандай да бір M нүкте координат басынан алыстаған сайын түзуге шексіз жақындаса (6б-сурет).



6а-сурет



6б-сурет

Көлбеу асимптотаның дербес жағдайы ($k=0$) **горизонталь асимптота** болады: $y=b$

Көлбеу асимптотаны мынадай теорема көмегімен табуға болады.

Теорема. $y=kx+b$ түзуі $y=f(x)$ функция графигінің көлбеу асимптотасы болуы үшін мынадай шектердің бар болуы қажетті және жеткілікті:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b.$$

Функцияны зерттеп оның графигін салуды мынадай ретпен жүргізген жөн:

1. Функцияның анықталу облысын табу;
2. функцияны жұп, тақтылыққа зерттеу;
3. функцияны периодтылыққа зерттеу;
4. функцияны үзіліссіздікке зерттеп, үзіліс нүктелерін табу;
5. күдікті нүктелерін табу;
6. монотонды аралығы мен экстремумдарын табу;
7. ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелерін табу;
8. функция графигінің асимптоталарын табу;
9. функция графигінің координаталар осімен қилысу нүктелерін;
10. зерттеулерге сүйеніп график салу.