

Жетінші лекция

ТУЫНДЫНЫҢ ЭКОНОМИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Айталық $y=f(x)$ функциясы өндірілген өнім x көлемінен оған кеткен y шығын арасындағы байланысты сипаттасын.

Егер өндіріс көлемін x -тен $(x + \Delta x)$ -ке арттырсақ, яғни Δx бірлікке, онда жұмсалған шығын да $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ бірлікке көбейеді.

Ал $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынас өндіріс көлемін Δx бірлікке өзгерткендегі орташа шығынды береді. $\Delta x \rightarrow 0$ жағдайдағы $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынастың шегі, яғни $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, өндірістің шектік шығынын береді.

Δx шаманы аз деп есептесек $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ формуланы мынадай түрде жазуға болады:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x),$$

осыдан $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ немесе $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$.

Егер x өте үлкен шама деп, ал Δx шаманы аз деп, айталық $\Delta x = 1$ деп есептесек, онда $f(x + 1) - f(x) \approx f'(x) \cdot 1$ немесе $f'(x) \approx f(x + 1) - f(x)$. Сонымен, өндірістің шектік шығыны өндіріс көлемін $\Delta x = 1$ бірлікке өзгерткендегі үстеме өнім өндіруге кеткен қосымша шығынға тең болады.

Мысалы, $y=f(x)$ функциясы қандай да бір уақыт мезетінде x жұмысшының y өндірілген өнім көлемі арасындағы байланысты сипаттасын. Айталық, фирма тағы бір адамды жұмысқа қабылдады. Онда

$$f'(x) \approx f(x + 1) - f(x)$$

шама жаңадан келген жұмысшының өндірген өнім көлемі.

Егер C - өнім бірлігі (бағасы), ал p – фирманың жұмысшыға уақыт мезетінде төлейтін жалақысы болса, онда $Cf'(x) > p$ болған кезде фирмаға тағы бір жұмысшыны алуға болады, себебі жұмысшының фирмаға түсіретін пайдасы одан алатын

жалақысынан көп. Осы ара қатынасты экономиканың алтын заңы дейді.

$y=f(x)$ функциясы қандай да бір уақыт мезетінде y өндірілген өнім көлемінің x адам еңбегінен тәуелділігін сипаттаса, онда $f'(x)$ шаманы x нүктесіндегі шектік еңбек өнімділігі деуге болады.

Функция иілгіштігі (Эластичность функции)

$y=f(x)$ функциясы y шаманың x шамадан тәуелділігін білдірсін. Тәуелсіз аргумент Δx шамаға өзгергенде тәуелді айнымалы да Δy шамаға өзгереді. Мынадай сұрақ туындайды, y тәуелді айнымалының x аргумент өзгерісіне деген иілгіштігін қалай өлшеу керек. Бір айнымалының екінші айнымалыға әсерін сипаттайтын шама ретінде туындыны алуға болады. Ол функцияның аргумент өзгерісіне қатысты өзгеріс жылдамдығын сипаттайды. Бірақ экономикада бұл қолайсыздау, себебі ол шамаларды немен өлшейтінімізге байланысты. Мысалы, қандай да бір затқа деген q сұраныс функциясының оның p бағасынан тәуелділігін алсақ, онда туынды $q' = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}$ мәні (баға теңгемен өлшенгенде) сұраныс немен өлшенетіндігіне байланысты. Егер кг өлшенсе, туынды кг/тг, ал центнермен өлшенсе ц/тг болады. Баға бірдей болғанымен, туынды мәндері әртүрлі. Сондықтан экономикада бір айнымалының екінші айнымалы өзгерісіне деген сезімталдығын өрнектейтін өлшем бірліксіз шама енгізіледі. Ондай шама ретінде айнымалылардың абсолюттік өзгерістерінің $\Delta y : \Delta x$ қатынасы емес, олардың салыстырмалы немесе проценттік өзгерістерінің қатынасын алады, яғни

$$\left(\frac{\Delta y}{y} 100\% \right) : \left(\frac{\Delta x}{x} 100\% \right).$$

Анықтама. y айнымалының x айнымалы өзгерісінен иілгіштігі немесе $y=f(x)$ функциясының иілгіштігі

(эластикалыгы) деп олардың салыстырмалы немесе проценттік өзгерістерінің қатынасының шегін айтамыз, яғни

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\Delta y}{y} 100\% \right) : \left(\frac{\Delta x}{x} 100\% \right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$= \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$E_x(y)$ функция иілгіштігі x аргумент 1% -ке өзгергенде (x -тен 1,01х шамаға) y функциясы қанша процентке өзгертінін сипаттайды.

Дифференциалдар кестесі. $u=g(x)$ дифференциалданатын функция болсын. Сонда

№№	$y=f(x)$	$y=f(u(x))$
1	$C' = 0$	
2	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
3	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4	$(a^x)' = a^x \ln a, 0 < a \neq 1$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
6	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, 0 < a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

11	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14	$(tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(tgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15	$(ctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Функция шегінің анықтамасына сүйеніп туынды табу

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ формуласын мынадай түрде көшіріп жазуға болады:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x),$$

мұндағы $\alpha(x)$ - ақырсыз аз шама, яғни $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$. Түрлендірейік,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

мұндағы $f'(x)\Delta x$ - функция өсімшесінің **сызықты бөлігі** деп аталады және ол Δx өсімшеге пропорционал. Ал $\alpha\Delta x$ шама екі ақырсыз аздың көбейтіндісі ретінде Δx өсімшеге қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз шама болады.

Анықтама. *Функция өсімшесінің сызықты бөлігі функция дифференциалы деп аталады да, dy деп белгіленеді.* Сонымен,

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$y=x$ функциясының дифференциалын табайық: $dy = x' \Delta x = 1 \Delta x = \Delta x$.
Демек аргумент дифференциалы оның өсімшесіне тең екен. Олай болса функция дифференциалын мынадай түрде жазамыз:

$$dy = f'(x)dx \quad (4)$$

Егер аргумент өсімшесі абсолют шамасы бойынша аз шама болса, онда функция өсімшесі мен дифференциалы жуық шамамен тең болады, яғни $\Delta y \approx dy$. Түрлендірейік,
 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$. Осыдан,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx \quad (5).$$

(5) формуламен функцияның мәнін жуықтап есептейді.
Неғұрлым Δx аз болса, соғұрлым формула дәлірек болады.