

Алтыншы лекция

ТУЫНДЫ

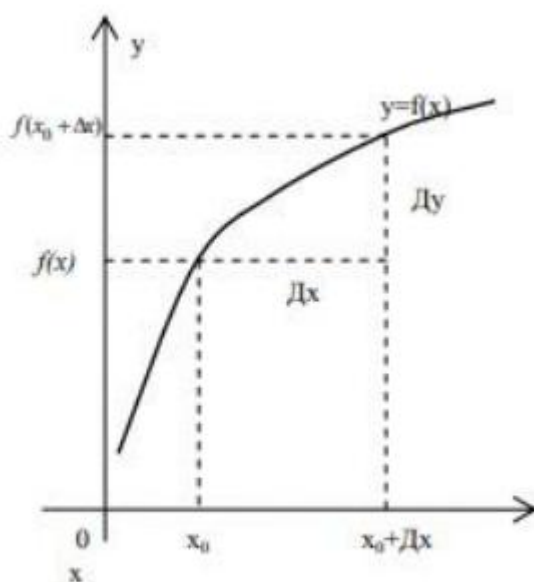
Көп жағдайда функция мәнін білумен қатар аргументтің өзгерісіне байланысты функцияның өзгеру жылдамдығын білу де маңызды болады.

$y=f(x)$ функциясын қарастырайық (1-сурет). Осы функция $[a, b]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болсын. Кез келген $x_0 \in [a, b]$ үшін $x - x_0$ айырма x аргументтің x_0 нүктесіндегі **өсімшесі** деп аталады да, Δx деп белгіленеді. Сонымен,

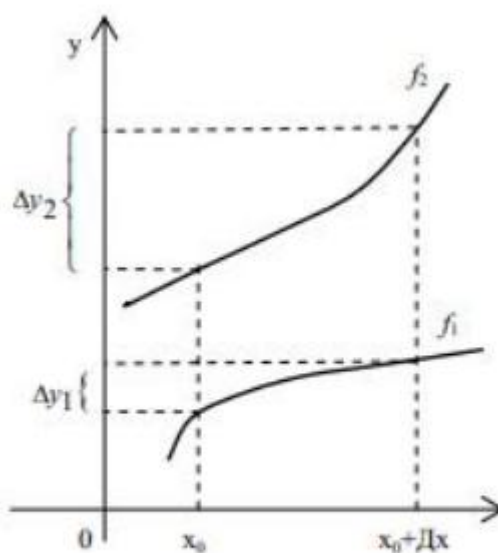
$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x.$$

Ал $f(x) - f(x_0)$ айырма $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі **өсімшесі** деп аталады да, Δy деп белгіленеді. Сонымен,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$



1-сурет



2-сурет

2-суретте көрсетілген $y=f_1(x)$ және $y=f_2(x)$ функцияларды қарастырайық. Аргумент мәні Δx шамаға өзгергенде бұл функциялардың мәндері де белгілі бір шамаға өзгереді. Суретте $f_2(x)$ функцияның мәні $f_1(x)$ функцияға қарағанда көп өзгереді (өседі).

Аргумент мәні бірдей шамаға өзгерген кездегі функциялардың өзгерістерін салыстыру үшін функцияның өзгеріс жылдамдығы ұғымын енгізеді. Оны орташа жылдамдық дейді де, функция өзгерісінің аргумент өзгерісіне қатынасымен анықтайды:

$$\text{Орташа жылдамдық} = \frac{\text{Функция өзгерісі}}{\text{Аргумент өзгерісі}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Орташа жылдамдық x_0 нүктесіне ғана қатысты қарастырылмай, аргумент өзгерісінен де байланысты болады. Функция жылдамдығын аргумент өзгерісінен байланыссыз қарастыру үшін функцияның нүктедегі жылдамдығын қарастырады. Функцияның нүктедегі жылдамдығын анықтау үшін x -ті x_0 аргументке шексіз жақындатады, немесе $\Delta x \rightarrow 0$. Осы кезде үзіліссіз функция өзгерісі нөлге жақындайды, яғни $\Delta y \rightarrow 0$. Нөлге шексіз жақындайтын функция өзгерісінің нөлге шексіз жақындайтын аргумент өзгерісіне қатынасы функцияның x_0 нүктедегі өзгеріс жылдамдығын береді. Функцияның x_0 нүктедегі осы өзгеріс жылдамдығын $f(x)$ функциясының x_0 нүктедегі туындысы деп атайды:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Сонымен, функция туындысының анықтамасын берейік.

Анықтама. *Функция өсімішесінің аргумент өсімішесіне қатынасының аргумент өсімішесі нөлге ұмтылған кездегі шегі функция туындысы деп аталады. Әдетте оны $f'(x)$ немесе y' деп белгілейді:*

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Функцияның туындысын алуды – функцияны дифференциалдау дейді.

$(a;b)$ интервалының әрбір нүктесінде туындысы бар функцияны сол интервалда дифференциалданады дейді.

Мынадай тұжырым дұрыс болады: **Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктеде дифференциалданса, онда функция x_0 нүктеде үзіліссіз болады.**

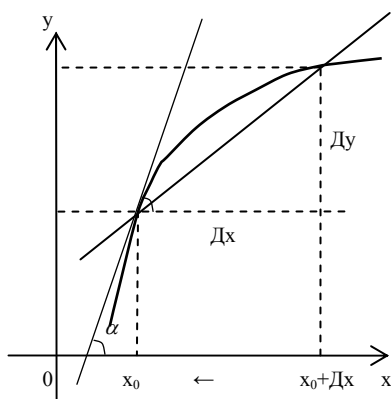
Бірақ осыған кері тұжырым дұрыс бола бермейді. **Мысалы,** $y=|x|$ функциясы $x=0$ нүктеде үзіліссіз. Бірақ оның $x=0$ нүктедегі туындысы болмайды. Шынында да, егер бар болса, туындыны мына формуламен табар едік:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Ал $x=0$ нүктеде

$$\frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{егер } \Delta x > 0 \\ -1, & \text{егер } \Delta x < 0 \end{cases}$$

болғандықтан $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ қатынастың шегі болмайды. Шек болмаса



3-сурет

туындысы да жоқ.

Туындының геометриялық мағынасы. $y=f(x)$ функциясы

x_0 нүктесінде дифференциал-

дансын. Осы функцияның $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

қатынасы α бұрыштың

тангенсіне тең. $\Delta x \rightarrow 0$ жағдайда

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ жағдайда M_0M қима функция графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанамаға айналады. Ал $\operatorname{tg} \alpha$ жанаманың (түзудің) бұрыштық коэффициенті, яғни

$$k = \operatorname{tg} \alpha .$$

Сонымен, *туындының геометриялық маңнасы: $f'(x_0)$ туынды дегеніміз $y=f(x)$ функция графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті:*

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \quad (2)$$

Сонда $y=f(x)$ функция графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанама теңдеуі мынадай түрде жазылады:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0) \quad (3)$$

Дифференциалдау ережелері. $u=u(x)$ және $v=v(x)$ функциялардың әрқайсысы берілгенх нүктесінде дифференциалданатын болса, онда бұл функциялардың қосындысы(айырымы), көбейтіндісі және қатынасы ($v(x) \neq 0$) сол нүктеде дифференциалданады, және мына формулалар дұрыс болады:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (Cu)' = Cu', \quad C = \text{const}$$

$$3) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$4) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} .$$

$$5) f(u(x)) \text{ күрделі функция туындысы:}$$

$$f'_x(u(x)) = f'_u(u) \cdot u'_x(x) .$$

$$6) y=f(x) \text{ функциясына кері функция } (x=f^{-1}(y)) \text{ туындысы:}$$

$$x'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

7) Айқын емес түрде берілген функция, $F(x,y)=0$, туындысы:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

8) Дәрежелі-көрсеткіштік $y = [f(x)]^{g(x)}$ функция туындысы. Алдымен берілген теңдеудің екі жағын логарифмдейік,

$$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x) \ln[f(x)].$$

Екі жағынан туынды аламыз,

$$\frac{1}{y} y' = g'(x) \ln[f(x)] + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x).$$

Сонымен,

$$y' = \left[g'(x) \ln[f(x)] + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \right] [f(x)]^{g(x)}.$$

9) **Жоғары ретті туынды.** $y' = f'(x)$ туындыны функцияның 1-ретті туындысы дейді. 1-ретті туындыдан алынған туынды функцияның 2-ретті туындысы деп аталады да, y'' деп белгіленеді. Сонымен,

$$y'' = (f'(x))'.$$

Осылайша 3-ретті, т.с.с. n-ретті туындыларды анықтауға болады,

$$y''' = (f''(x))', \dots, y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'.$$