

Бесінші лекция

АҚЫРСЫЗ АЗ ЖӘНЕ АҚЫРСЫЗ ҮЛКЕН ФУНКЦИЯЛАР

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының $x \rightarrow x_0$ жағдайда шегі ноль болса, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, онда $f(x)$ функциясы $x \rightarrow x_0$

жағдайда ақырсыз аз функция деп аталады.

Осы анықтаманы “ $\varepsilon - \delta$ ” тілінде былай да айтуға болады: Кез келген $\varepsilon \rightarrow 0$ үшін $\delta \rightarrow 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x -тер үшін $|f(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, $f(x)$ функциясы $x \rightarrow x_0$ жағдайда ақырсыз аз функция деп аталады.

Ақырсыз аз функция қасиеттері.

1. Егер $y = f(x)$ функциясының $x \rightarrow x_0$ жағдайда A шегі бар болса, онда $f(x)$ функциясын осы A саны мен $x \rightarrow x_0$ жағдайда ақырсыз аз болатын $\alpha(x)$ функция қосындысы түрінде жазуға болады, яғни $f(x) = A + \alpha(x)$.
2. Ақырсыз аз функцияның шенелген функцияға (сонмен қатар, тұрақтыға, басқа ақырсыз азға) көбейтіндісі ақырсыз аз функция болады.
3. Ақырсыз аз функцияның шегі нольден өзге функцияға қатынасы ақырсыз аз функция болады.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының $x \rightarrow x_0$ жағдайда шегі шексіздік болса, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, онда $f(x)$ функциясы $x \rightarrow x_0$

жағдайда ақырсыз үлкен функция деп аталады.

Ақырсыз аз функция мен ақырсыз үлкен функция арасында мынадай байланыс бар: **Егер $\alpha(x)$ функциясы $x \rightarrow x_0$ жағдайда**

ақырсыз аз болса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ функциясы $x \rightarrow x_0$ жағдайда ақырсыз үлкен болады.

Мысалы, $\alpha(x) = \frac{6x}{x+1}$ функциясы $x \rightarrow 0$ жағдайда ақырсыз аз функция болады.

Шынында да, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x+1}$ шегін есептейік.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x+1} = \frac{6 \cdot 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ал $\frac{1}{\alpha(x)} = \frac{x+1}{6x}$ функциясы $x \rightarrow 0$ жағдайда ақырсыз үлкен функция болады, яғни оның шегі шексіздік. Шынында да, шегін есептейік.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{6x} = \frac{0+1}{6 \cdot 0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Мұндағы $\frac{1}{0}$ қатынасты шектер тілінде “ақырсыз азға кері шама ақырсыз үлкен” дейді де, шексіздікке теңестіреді.

Ақырсыз аз функциялар нолге әртүрлі жылдамдықпен жақындайды. Көптеген жағдайда ақырсыз аздардың нолге ұмтылу жылдамдығын анықтау үшін оларды өзара салыстыру керек болады. Салыстыру үшін олардың қатынасының $x \rightarrow x_0$ жағдайдағы шегін қарастырады.

Айталық $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ $x \rightarrow x_0$ жағдайда ақырсыз аз функциялар және $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ болсын. Онда, егер

1) $k = 0$ болса $\alpha(x)$ $\beta(x)$ -ға қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз деп;

2) $k = C = \text{const}$ ($C \neq 1$) болса $\alpha(x)$ мен $\beta(x)$ бірдей ретті ақырсыз аз деп;

3) $k = 1$ болса $\alpha(x)$ мен $\beta(x)$ эквивалентті ақырсыз аз деп аталады.

$\alpha(x)$ мен $\beta(x)$ эквивалентті дегенді $\alpha(x) \sim \beta(x)$ деп жазады. Егер $\alpha(x)$ функциясы $x \rightarrow x_0$ жағдайда ақырсыз аз болса, онда

$$1. \sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$2. \ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x), \quad \log_a[1 + \alpha(x)] \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a};$$

$$3. a^{\alpha(x)} \sim 1 + \alpha(x) \cdot \ln a, \quad e^{\alpha(x)} \sim 1 + \alpha(x);$$

$$4. [1 + \alpha(x)]^n \sim 1 + n\alpha(x), \quad \sqrt[n]{1 + \alpha(x)} \sim 1 + \frac{1}{n}\alpha(x);$$

$$5. \cos \alpha(x) \sim 1 - \frac{1}{2}[\alpha(x)]^2.$$

1.-5. қатынастар эквивалентті функциялар кестесін береді. Бұл кестені шек есептеу кезінде мына теоремаға сүйеніп қолдануға болады.

Теорема. Егер $x \rightarrow x_0$ жағдайда $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ және $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Мысал. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x}} = 0$. Мұнда $x \rightarrow 0$ жағдайда $\sin 3x \sim 3x$ болғандықтан $\sin 3x$ орнына $3x$ алынды.

ФУНКЦИЯ ҮЗІЛІССІЗДІГІ. ҮЗІЛІС ТҮРЛЕРІ

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының $x \rightarrow x_0$ жағдайда шегі функцияның сол нүктедегі мәніне тең болса, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, функция x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Егер $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Сонда функция үзіліссіздігінің анықтамасын былай да айтуға болады: *Берілген нүктеде аргументтің ақырсыз аз өсімішесіне функцияның да ақырсыз аз өсімішесі сәйкес келсе, яғни*

$$\Delta y \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

функция x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

$y = f(x)$ функциясы қандай да бір аралықтың үзіліссіз болуы үшін, ол сол аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болуы керек.

Үзіліссіз функция қасиеттері.

1. $y = g(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз, ал $f(y)$ функциясы y_0 нүктесінде үзіліссіз болса, $f(g(x))$ күрделі функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болады және

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f \left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right].$$

2. Нүктеде үзіліссіз функциялардың алгебралық қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы (бөліміндегі функция нолден өзге болғанда) үзіліссіз функция болады.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының $x \rightarrow x_0$ жағдайда *шегі функцияның сол нүктедегі мәніне тең болмаса, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, функция x_0 нүктесінде үзілісті функция деп, ал x_0 нүктені функцияның үзіліс нүктесі деп атайды.*

Біржақты шектер ұғымын енгізейік.

Айталық $x \rightarrow x_0$ және $x < x_0$, онда $x \rightarrow x_0 - 0$ деп жазады, ал осы жағдайдағы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ шекті функцияның **сол жақты шегі** деп атайды. Дәл осылайша функцияның **оң жақты** $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ шегі де анықталады. Функцияның сол жақты және оң жақты шектерін **біржақты шектер** дейді.

Енді үзіліс түрлерін ажыратайық.

Анықтама. *Функцияның x_0 нүктесінде өз-ара тең емес ақырлы біржақты шектері бар болса, x_0 нүктесі функцияның I-текті үзіліс нүктесі деп аталады. Кейде оны ақырлы секіріс деп (10а-сурет) атайды.*

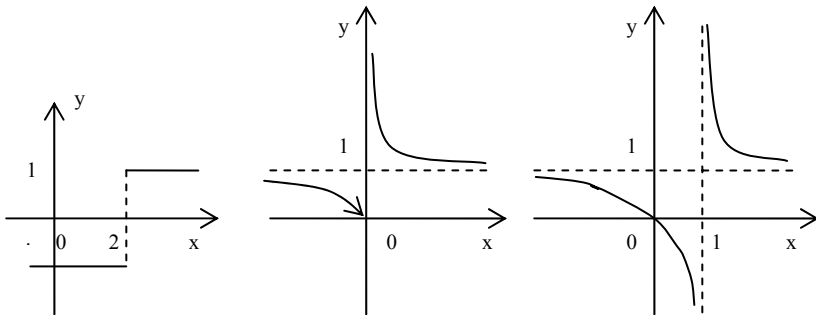
Анықтама. *Функцияның x_0 нүктесіндегі ақырлы біржақты шектердің ең болмағанда біреуі жоқ болса, x_0 нүктесі функцияның II-текті үзіліс нүктесі деп аталады (10б-сурет).*

Мысал. а) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ функциясы $x=2$ нүктесінде үзіліссіздікке зертте.

Шешуі. $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \left[x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \right] = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \left[x > 2 \Rightarrow |x-2| = (x-2) \right] = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1,$$

яғни сол жақты шегі -1 , ал оң жақты шегі 1 , ақырлы сандар, өз-ара тең емес, олай болса $x=2$ нүктесі I-текті үзіліс нүктесі болады (10а-сурет).



б) $y = 3^{\frac{1}{x}}$ функциясын үзіліссіздікке зертте.

Шешуі. Функция $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ аралығында анықталған. $x=0$ нүктесіндегі біржақты шектерді табайық.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{0-0}} = \left| x \rightarrow 0-0 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty, 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \right| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{0+0}} = \left| x \rightarrow 0+0 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, 3^{+\infty} = \infty \right| = \infty,$$

яғни сол жақты шегі 0, ал оң жақты шегі шексіздік. Олай болса $x = 0$ нүктесі II-текті үзіліс нүктесі болады (10б-сурет).

в) $y = \frac{x}{x-1}$ функциясын үзіліссіздікке зертте.

Шешуі. Функция $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ аралығында анықталған. $x = 1$ нүктесіндегі біржақты шектерді табайық.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-0-1} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1+0-1} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

яғни сол жақты де, оң жақты шегі де шексіздік. Олай болса $x = 1$ нүктесі II-текті үзіліс нүктесі болады (10в-сурет).