

Төртінші лекция

ШЕК ҰҒЫМЫ

Экономикада көптеген шамалардың орташа мәндерін қарастырады. Мысалы, орташа шығын, орташа табыс, орташа пайда, т.с.с. Сонымен қатар, қандай да бір шаманы көбейткенде немесе азайтқанда нәтиже қаншалықты өзгертіндігін білу үшін математиканың шектік талдау әдісін қолдану керек болады. Шектік талдау негізінде сіздерге мектептен таныс шек ұғымы жатыр.

Демография саласындағы адам жасының орташа ұзақтығын есептеу де шекке мысал бола алады. Айталық x жастағы адамның енді алдында жасайтын өмірінің орташа ұзақтығы e_x дейік. Әрине, жас балаға қарағанда 80 жастағы қарт адам үшін бұл орташа ұзақтық бірталай аз екенін түсіну қиын емес. Жас ұлғайған сайын алдымыздағы жастың ұзақтығы e_x әрине қысқарады. Бірақ, алдын ала e_x нөлге тең болатын x -ті көрсету мүмкін емес. Олай болғанда адам сол жасқа келгенде бірден өлу керек болар еді. Сонымен e_x шамасы, x өскен сайын, біртіндеп нөлге ұмтылады.

Енді функция шегінің анықтамасына көшейік. $y=f(x)$ функциясы қандай да бір x_0 нүкте маңайында анықталған болсын.

Анықтама. *Егер алдын ала берілген, мейілінше аз $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының x аргумент x_0 -ге ұмтылғандағы шегі деп аталады да, былай жазылады:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Анықтамадағы $|x - x_0| < \delta$ теңсіздікті ашсақ, мынадай қос теңсіздік аламыз:

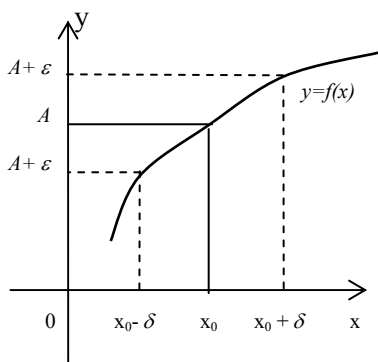
$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

$(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ интервалды x_0 нүктесінің δ -маңайы дейді.

Сол сияқты $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздікті ашсақ:

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

$(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ интервалды A нүктесінің ε -маңайы дейді.



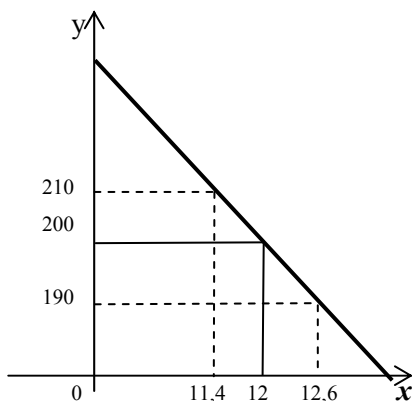
Енді анықтаманы сурет бойынша айтсақ: Алдын ала берілген, ε санына δ саны табылып, аргумент мәндері x_0 нүктесінің δ -маңайына тиісті болғанда функцияның сәйкес мәндері A нүктесінің ε -маңайында жатса, A саны $f(x)$ функциясының x аргумент x_0 -ге ұмтылғандағы шегі деп

аталады.

Мысал. Өндіріс орны шығаратын заттың бір данасының бағасы мен оған деген сұраныс (мың дана) арасындағы байланыс мынадай қатынаспен анықталған:

$$y = 400 - \frac{50}{3}x.$$

Заттың бір данасының бағасы 190 – 210 теңге арасында тұруы үшін өндіріс орнының өнім көлемі қалай өзгеруі керек (9-сурет)?



Шешуі. $(190; 210)$ интервалының арасы $A = 200$ теңге, олай болса $\varepsilon = 10$.

Шек анықтамасындағы $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігін қолданайық:

$$\left| 400 - \frac{50}{3}x - 200 \right| < 10. \quad \text{Осы}$$

теңсіздікті түрлендіріп ықшамдасақ мынадай теңсіздік аламыз:

$$11,4 < x < 12,6.$$

Соңғы теңсіздікті мынадай

$|x-12| < 0,6$ түрге келтіріп жазсақ, есеп сұрағына жауап беруге болады: Заттың бір данасының бағасының 200 теңгеден ауытқуы 10 теңгеден артпауы үшін, өндіріс орны өнім көлемінің өзгеруін 0,6 мың данадан асырмауы керек екен.

Функция шегінің қасиеттері. Айталық $y = f_1(x)$ және $y = f_2(x)$ функцияларының $x \rightarrow x_0$ жағдайда $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$ және $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ шектері бар болсын.

1. Екі функцияның алгебралық қосындысының шегі шектердің алгебралық қосындысына тең болады, яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

2. Екі функцияның көбейтіндісінің шегі шектердің көбейтіндісіне тең болады, яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Салдар. $\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f_2(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, мұндағы $C - \text{const.}$

3. Екі функцияның қатынасының шегі шектердің қатынасына тең болады (әрине, егер бөлімдегі функция нолден өзгеше болса), яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}.$$

Мысал. $y = \frac{6x}{x+1}$ функциясының $x \rightarrow 2$ жағдайдағы шегін

табу керек.

Шешуі. Қысқаша айтсақ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x}{x+1}$ шек есептеу керек. Функция шегінің қасиеттерін қолданып есептейік:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x}{x+1} = \frac{6 \cdot 2}{2+1} = \frac{12}{3} = 4.$$

$y = \frac{6x}{x+1}$ функциясының $x \rightarrow 2$ жағдайдағы шегі 4 болады екен.

БІРІНШІ ЖӘНЕ ЕКІНШІ ТАМАША ШЕКТЕР

Теорема. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функциясы $x=0$ нүктеде анықталмаған, бірақ $x \rightarrow 0$ жағдайда шегі бар және

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Осы шекті **бірінші тамаша шек** деп атайды.

Бірінші тамаша шек салдары:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Мысал. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Теорема. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функциясының $x \rightarrow \infty$ жағдайда шегі бар және

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Осы шекті **екінші тамаша шек** деп атайды. Мұндағы $e = 2,71828...$ иррационал саны Эйлер саны екені белгілі.

Екінші тамаша шек салдары:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a=e \text{ болғанда} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a=e \text{ болғанда} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Мысал. а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ екенін көрсет.

Шешуі. $\frac{1}{x} = t$ деген білгілеу енгізейік. Осыдан $x = \frac{1}{t}$. Және де $x \rightarrow 0$ кезде $t \rightarrow \infty$. Енді шек есептесек

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} =$$

$$\left| -\frac{6}{3x+2} = t \Rightarrow x = -\frac{2}{t} - \frac{2}{3} \right| =$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{2}{3t} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{2}{3t}} (1+t)^{\frac{1}{9}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}} \right]^{-\frac{2}{3}} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{9}} = e^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$