

Үшінші лекция

ФУНКЦИЯ ҰҒЫМЫ, ҚАСИЕТТЕРІ

Функция немесе функциялық тәуелділік ұғымы түрлі шамалар, экономикалық көрсеткіштер арасындағы байланыстарды моделдейтін математиканың маңызды ұғымы.

Анықтама. *X жиынының әрбір x элементіне ($x \in X$) белгілі бір заң немесе ереже бойынша Y жиынының y элементі сәйкес қойылса, онда X жиынында функция берілген деп атайды.*

x және y шамаларының арасындағы функциялық тәуелділікті $y=f(x)$ деп белгілейді, мұндағы x - аргумент(тәуелсіз айнымалы), y – функция(тәуелді айнымалы), f – ереже немесе заң.

Берілген функция анықталатын x аргументтерінің жиынын **функцияның анықталу облысы** деп, ал сәйкес y айнымалылардың жиынын **функцияның мәндер жиыны** деп атайды. Әдетте анықталу облысын $D(f)$ деп, ал мәндер жиынын $E(f)$ деп белгілейді.

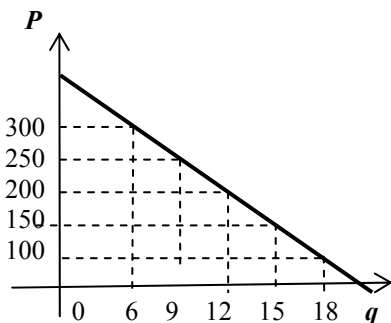
Функция түрлі тәсілдермен берілуі мүмкін. Ең көп және маңызды берілу түрлері: аналитикалық(формула түрінде), кестелік және графиктік.

Мысал ретінде заттың бағасы (p) мен сол затқа деген сұраныс (q) арасындағы байланысты қарастырайық:

p (теңге)	100	150	200	250	300	...
q (мың дана)	18	15	12	9	6	...

Кестеден көрініп тұрғандай, заттың бағасы артқан сайын, оған деген сұраныс төмендейді екен. Бұл байланысты графиктік түрде де беруге болады (1-сурет).

Заттың бағасы мен сұраныс арасында түзу сызықты $p=kq+b$ байланыс байқалады.



1-сурет

Берілген мәндерді пайдаланып бұл байланысты табу қиын емес:

$$p = 400 - \frac{50}{3}q.$$

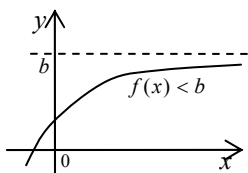
Кестенің төменгі жолындағы сұраныстың мәндерін q орнына қойсақ жоғары жолдағы бағаның

сәйкес мәндері шығып отырады. Сонымен, функцияның аналитикалық берілуінен оның кестелік және графиктік түрлерін оңай алуға болады екен.

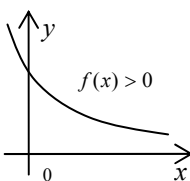
Функция қасиеттері. $y=f(x)$ функциясын қарастырайық.

1. **Шенелген функция.** Егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x үшін қандай да бір M нақты сан табылып $f(x) < M$ теңсіздігі орындалса функция **жоғарыдан шенелген**, ал $f(x) > M$ теңсіздігі орындалса функция **төменнен шенелген** деп аталады (2 а,б-сурет).

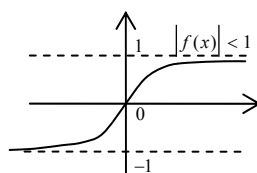
Егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x үшін қандай да бір M нақты сан табылып $|f(x)| < M$ теңсіздігі орындалса функция **шенелген** деп аталады (2 в-сурет).



2 а-сурет



2 б-сурет



2 в-сурет

2. **Жұп және тақ функция.** . Егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x үшін

$$f(-x) = f(x)$$

теңдігі орындалса функция **жұп** деп, ал

$$f(-x)=-f(x)$$

теңдігі орындалса функция **тақ** деп аталады. Мысалы, $y=x^{2n}$, $y=|x|$ функциялары жұп, ал $y=x^{2n+1}$, $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$ функциялары тақ болады.

Жұп және тақ функциялардың анықталу облыстары координаталар басына қарағанда симметриялы болады.

Жұп функция графигі Оу осіне, ал тақ функция графигі $O(0,0)$ – координаталар басына қарағанда симметриялы болады.

Жұп функциялардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі, бөліндісі - жұп функция болады.

Тақ функциялардың қосындысы мен айырымы - тақ, ал көбейтіндісі мен бөліндісі - жұп функция болады.

Егер функция үшін $f(-x)=f(x)$ және $f(-x)=-f(x)$ теңдіктерінің екеуі де орындалмаса функция жұп та, тақ та емес (бейтарап) болады. Мысалы, $y=x^2+x$ функциясы жұп та, тақ та емес.

3. Периодты функциялар. Егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x үшін

$$f(x+T)=f(x)$$

теңдігі орындалатындай T сан табылса функция **периодты** деп аталады. Осындай T сандардың ең кішісі функцияның *негізгі периоды* деп аталады. Мысалы, $y=\sin(x)$, $y=\cos(x)$ (бұлардың негізгі периоды 2π), $y=\operatorname{tg}(x)$, $y=\operatorname{ctg}(x)$ (бұлардың негізгі периоды π) - периодты функциялар.

4. Бірсазды (монотонды) функциялар. Егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) мәндер үшін

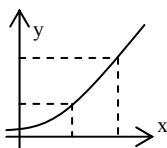
$f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, функция **өспелі** (3 а-сурет),

$f(x_1) > f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, функция **кемімелі** (3 б-сурет),

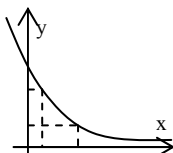
$f(x_1) \leq f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, функция **кемімейтін** (3 в-сурет),

$f(x_1) \geq f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, функция **өспейтін** (3 г-сурет)

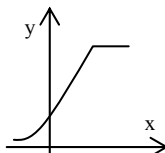
деп аталады.



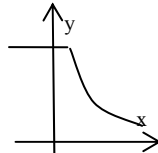
3 а-сурет



3 б-сурет



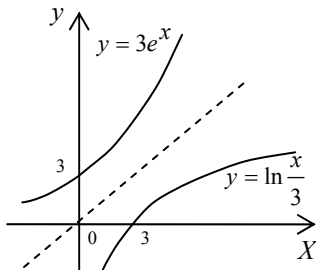
3 в-сурет



3 г-сурет

Егер қандай да бір аралықта функция не тек өспелі немесе тек кемімелі болса, оны осы аралықта монотонды (бірсазды) деп айтады.

5. Кері функция. $y=f(x)$ функциясының кері функциясын табу үшін алдымен x аргументті y айнымалы арқылы өрнектейміз, $x=g(y)$, одан кейін, тәуелсіз аргумент x деп ал ал тәуелді айнымалы y деп белгілеу қалыптасқандықтан, алынған өрнектегі x пен y орындарын алмастырамыз, $y=g(x)$. Пайда болған $g(x)$ функция берілген $f(x)$ функцияға кері функция болады.



4-сурет

Өзара кері функциялардың графигі $y=x$ (бірінші және үшінші декарттық бұрыштардың биссектрисасы) түзуіне қарағанда симметриялы болады.

Мысалы, $y = \ln \frac{x}{3}$

функциясының кері функциясын табу керек (4-сурет).

Шешуі. Алдымен теңдеудегі x аргументті y айнымалы арқылы өрнектеу үшін x -ке қатысты шешеміз:

$$\frac{x}{3} = e^y \quad \text{осыдан} \quad x = 3e^y.$$

Енді алынған өрнектегі x пен y орындарын алмастырамыз: $y = 3e^x$.

Сонда берілген $y = \ln \frac{x}{3}$ функцияға кері функция $y = 3e^x$ болады.

Берілген функцияның анықталу облысы оған кері функцияның мәндер жиыны болады да, мәндер жиыны кері функцияның анықталу облысы болады.

Аралықта монотонды өсетін немесе монотонды кемитін функциялардың ғана кері функциялары табылады.

6. Күрделі функция. $y=f(g(x))$ түрінде берілген функцияны күрделі функция дейді. Кейде күрделі функцияны мынадай түрде де береді: $y=f(u)$ мұндағы $u=g(x)$. Бұл жағдайда u - аралық айнымалы, ал x - тәуелсіз аргумент болады.

Мысалы, $y = \ln \frac{x}{3}$ функциясы күрделі функция. Оны

$y = \ln u$, мұндағы $u = \frac{x}{3}$ түрінде жазуға болады.

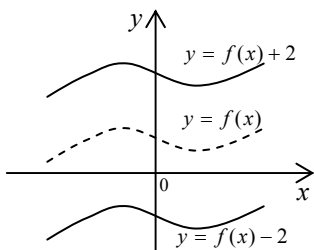
7. Айқын емес түрде берілген функция. Егер функция түрінде $F(x,y)=0$, яғни y айнымалыға қатысты шешілмеген түрінде, берілсе функция айқын емес түрде берілген дейміз. Жоғарыда қарастырылған $y = \ln \frac{x}{3}$ функцияны айқын емес түрде былай жазамыз:

$$\ln \frac{x}{3} - y = 0.$$

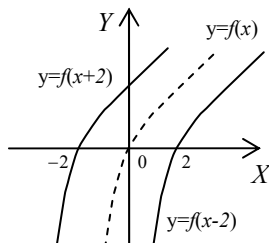
КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯ ГРАФИГІН БЕЛГІЛІ ФУНКЦИЯ ГРАФИГІН ТҮРЛЕНДІРУ АРҚЫЛЫ САЛУ

$y=f(x)$ функция графигі белгілі болса төмендегі функциялардың графиктерін салуға болады:

1. $y=f(x)+b$. Бұл функция графигі берілген функция графигін Оу осі бойымен b шамаға ($b>0$ болса жоғары, $b<0$ болса төмен) жылжыту арқылы салынады (5а-сурет).
2. $y=f(x+a)$. Бұл функция графигі берілген функция графигін Ох осі бойымен a шамаға ($a>0$ болса солға, $a<0$ болса оңға) жылжыту арқылы салынады (5б-сурет).

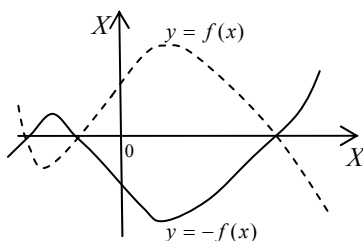


5а-сурет

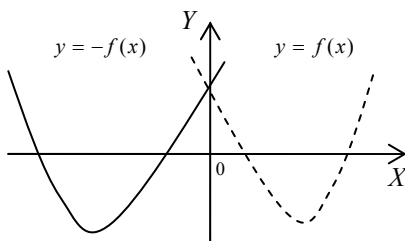


5 б-сурет

3. $y = -f(x)$. Бұл функция графигі берілген функция графигіне Ох осіне қарағанда симметриялы орналасады (6а-сурет).
4. $y = f(-x)$. Бұл функция графигі берілген функция графигіне Оу осіне қарағанда симметриялы орналасады (6б-сурет).

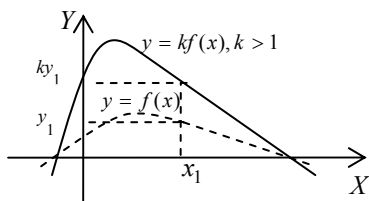


6а-сурет

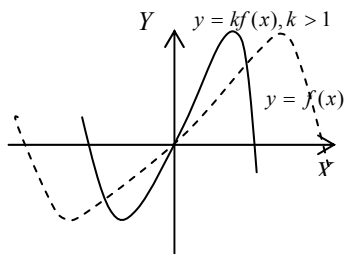


6б-сурет

5. $y = kf(x)$. Егер $k > 1$ болса функция мәні k есе артады, яғни график Оу осі бойымен созылады. Егер $k < 1$ болса функция мәні k есе кемиді, яғни график Оу осі бойымен сығылады (7а-сурет).
6. $y = f(kx)$. Егер $k > 1$ болса берілген функция графигін Ох осі бойымен k есе сығылады. Егер $k < 1$ болса берілген функция графигін Ох осі бойымен $\frac{1}{k}$ есе созылады (7а-сурет).

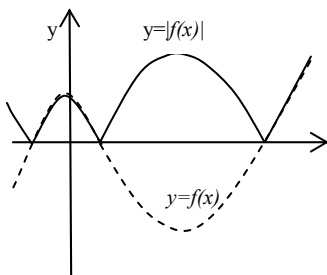


7а-сурет

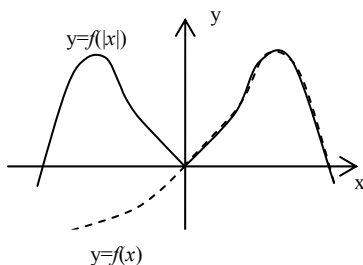


7б-сурет

7. $y=|f(x)|$. Егер $f(x) \geq 0$ болса, $|f(x)| = f(x)$ болады, яғни Ох осінің жоғары жағында жатқан функция графигін өзгертусіз қалдыру керек. Егер $f(x) \leq 0$ болса, $|f(x)| = -f(x)$ болады, яғни Ох осінің төменгі жағында жатқан функция графигін Ох осіне қарағанда симметриялы жоғары бөлікке бейнелеу керек (8а-сурет).
8. $y=f(|x|)$. Функция жұп, сондықтан функция графигі Оу осіне қарағанда симметриялы болады. $x \geq 0$ болса, $f(|x|) = f(x)$ болады, яғни Оу осінің оң жағында жатқан функция графигін өзгертусіз қалдыру керек және осы бөлікті Оу осіне қарағанда симметриялы сол бөлікке бейнелеу керек (8а-сурет).



8а-сурет



8б-сурет