4. МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗГЕ КІРІСПЕ

§ 4.1. Жиындар мен математикалық логика элементтері. Аралықтар

4.1.1. Математика пәні. Тұрақты және айнымал шамалар.

Ғылымдар ішінде математика ерекше орын алады. Математика – нақты өмірдің сандық қатыстары мен кеңістіктегі түрлері туралы ғылым.

Математика басқа ғылымдарға табиғат құбылыстары арасындағы түрлі қатыстарды өрнектеу үшін, сандар мен символдар тілін ұсынады. Бірақ математиканы қолданбас бұрын биолог, физик немесе экономист зерттелетін құбылыс мәнін терең түсінуі қажет, оны математикалық түрде өңдеуге болатындай етіп бөліктеуі керек.

Математикадағы зерттеу объектілері – қоғам мен табиғат құбылыстарын сипаттау үшін құрылған логикалық модельдер. Математика осы модельдер элементтерінің арасындағы қатыстарды зерттейді.

Бір ғана математикалық модель өзінің абстракциялылығынан әртүрлі процестерді сипаттай алады. Мысалы, бір дифференциалдық теңдеу радиоактивті ыдырауды да, дене температурасының өзгерісін де сипаттайды.

Табиғат құбылыстарын зерттеуде біз бір шаманың екінші шамаға тәуелділігін, шамалардың өзгеріп отыратындығын көреміз. Сондықтан айнымал шама математикалық анализ курсында негізгі түсінік болып табылады.

Айнымал шама деп, ең болмағанда өзара тең емес екі мәнге ие болатын шаманы қабылдаймыз. Шама тек бір ғана мән қабылдаса, ол тұрақты деп аталады. Айнымал шаманың қабылдайтын барлық мәндерін біріктірсек, осы шаманың мәндер жиынын аламыз.

4.1.2. Жиындар және оларға қолданылатын кейбір амалдар.

Жиын – қандай да бір объектілердің (заттардың) жиынтығы. Жиынға кіретін объектілерді **жиынның элементтері** деп атаймыз. Жиынды үлкен латын әріптермен: $A,B,\ldots,X,Y,\ldots$, ал оның элементтерін кіші латын әріптерімен: $a,b,\ldots,x,y,\ldots$ белгілейді.

$a \in A$ жазуы, a элементінің A жиынында жататынын (тиісті екенін), ал $a \notin A$ (немесе $a \overline{\in} A$) белгілеуі, a элементінің A жиынында жатпайтынын көрсетеді. Бірде-бір элементі жоқ жиын **бос жиын** деп аталады да $\varnothing$ арқылы белгіленеді.

$A \subset B$ жазуы, A жиынының әрбір элементі B жиынының да элементі, яғни B жиынында жатпайтын A жиынының бірде бір элементі жоқ екенін білдіреді ($\subset$ – енгізу белгісі). Бұл жағдайда A жиыны B жиынының **ішжиыны** деп аталады. Бос жиын – кез келген жиынның ішжиыны, өйткені жиында жатпайтын $\varnothing$ жиынының бір де бір элементі жоқ.

Егер $A \subset B$ және $B \subset A$ болса, онда ***A* мен *B* тең жиындар** $(A = B)$ деп аталады. Немесе, бірдей элементтерден құралған жиындарды тең деп атайды.

Жиындарды өрнек түрінде жазу үшін ***фигуралық жақша*** қолданылады. Мысалы: а) $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ жазуы, жиынның элементтері $a_1, a_2, ..., a_n$ және олардың саны n тең екенін көрсетеді.

Бұл жағдайда жиынның элементтерінің саны ақырлы, *n-ге* тең болғандықтан, A – **ақырлы жиын** деп аталады. Ақырлы емес жиындар, яғни **ақырсыз жиындар** бар. Олар *саналымды* (мысалы, бүтін сандар жиыны – саналымды ақырсыз жиын), немесе *саналымсыз* (мысалы, 0 мен 1 арасындағы нақты сандар жиынысаналымсыз ақырсыз жиын) болуы мүмкін;

б) A жиыны **негізгі *U* жиынының** қандай да бір α қасиетке ие болатын (немесе α шартын қанағаттандыратын) элементтерінен құралған ішжиын ретінде берілуі мүмкін. Бұл жағдайда оны келесі математикалық өрнек арқылы жазады $A = \{x \in U : \alpha(x)\}$ және ол, «A жиыны – U жиынының α қасиетке ие болатын элементтерінің жиыны» деп оқылады. Мысалы, $A = \{x \in N : (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0\}$ – берілген теңдеудің барлық ***натурал түбірлерінің*** жиыны, яғни $A = \{1, 2\}$.

Мысалдар. 1). Егер $A = \{1, 2, 3\}$ болса, онда бұл жиынның үш элементі $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ және сегіз ішжиыны бар: $\{1\} \subset A$, $\{2\} \subset A$, $\{3\} \subset A$, $\{1, 2\} \subset A$, $\{1, 3\} \subset A$, $\{2, 3\} \subset A$, $\{1, 2, 3\} \subset A$, $\varnothing \subset A$.

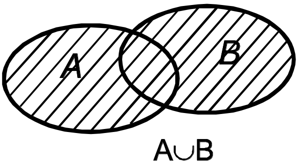
2) $A=\{1,2,3\}$ және $B=\{2;3;1\}$ жиындары тең. Өйткені $A\subset B$ және $B\subset A$ енгізулері орындалатынын көру қиын емес. Екі жиынның екеуі де тек 1, 2, 3 элементтерінен құралған.

Жиындарға жасалатын кейбір амалдарды қарастырайық.

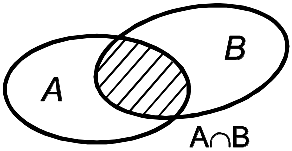
A мен ***B*** жиындарының **бірігуі** деп, *A* және *B* жиындарының ***ең болмағанда*** біреуіне тиісті элементтерден ғана құралған *C* жиынын айтады және оны $C=A\cup B$ (кейде $C=A+B$) арқылы белгілейді: $C=A\cup B\overset{def}{=}\{x: x\in A \ \ \text{немесе} \ \ x\in B\}$ (1-сурет).

A мен ***B*** жиындарының **қиылысуы** деп, *A* жиынында да, *B* жиынында да жататын (яғни *A* және *B* жиындарына ортақ) элементтерден құралған *C* жиынын айтады және оны $C=A\cap B$ (кейде $C=A\cdot B$) арқылы белгілейді: $C=A\cap B=\{x:\ x\in A \quad \text{және} \quad x\in B\}$ (2-сурет).

Мысал. $A=\{-1,2,5,7\}$ және $B=\{-1,0,5,6,7\}$ жиындары берілсе, онда $A\cup B=\{-1,0,5,6,7,2\}$, $A\cap B=\{-1,5,7\}$.



1-сурет



2-сурет

Бірігу және қиылысу амалдарының кейбір қасиеттерін жазып көрсетейік.

1) Коммутативтік: $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$

2) Ассоциативтік:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

3) Дистрибутивтік:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

4) Идемпотенттік: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

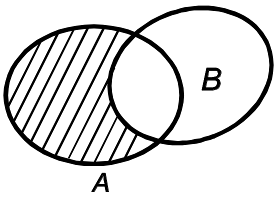
Сонымен бірге $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ теңдіктерінің де орындалатынын көру қиын емес.

Егер $A \cap B = \varnothing$ болса, онда A және B қиылыспайтын жиындар болады.

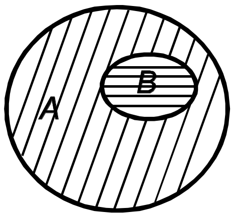
A мен ***B*** жиындарының **айырымы** деп, A жиынының B жиынына тиісті емес барлық элементтерінен құралған C жиынын айтады және оны $A \setminus B$ немесе A-B арқылы белгілейді:

$$C = A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Жалпы жағдайда, $(A \setminus B) \cup B \neq A$ теңсіздігі дұрыс (3-сурет), бірақ $B \subset A$ болса, онда $(A \setminus B) \cup B = A$ (4-сурет).



3-сурет



4-сурет

Мысал. $A = \{-1, 2, 5, 7\}$, $B = \{-1, 0, 5, 6, 7\}$ жиындары берілсе, $C = A \setminus B = \{2\}$.

Егер $A \subset B$ болса, онда $B \setminus A$ айырымы A жиынының B жиынына дейінгі **толықтауышы** деп аталады да, $\overline{A}_B$ (немесе A'_B, немесе $C_B A$) арқылы белгіленеді. Ал тек қана белгілі бір негізгі U жиынының іш жиындары қарастырылатын жағдайда A жиынының U жиынына дейінгі толықтауышы **А жиынының толықтауышы** деп аталады да, $\overline{A}$ (немесе A' немесе CA) арқылы белгіленеді.

Бұл анықтамадан $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$ теңдіктері шығады.

Келесі теңдіктер **қосарлас заңдар** немесе **де Морган заңдары** деп аталады:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (2)$$

Мысал. (2) теңдікті дәлелдеу керек:

▼ $x \in \overline{A \cap B}$ болсын. Онда $x \notin A \cap B$ болады да, $x \notin A$ немесе $x \notin B$, яғни $x \in \overline{A}$ немесе $x \in \overline{B}$. Ал бұл $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ деген сөз. Олай болса, келесі енгізу орындалады:

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (3)$$

Енді $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ болсын, онда $x \in \overline{A}$ немесе $x \in \overline{B}$ болады да, $x \notin A$ немесе $x \notin B$, яғни $x \notin A \cap B$ аламыз, ал бұл $x \in \overline{A \cap B}$ деген сөз. Сонымен

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B} \qquad (4)$$

енгізуін алдық. (3) пен (4) енгізулерінен анықтама бойынша

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

шығады. ▲

Жаттығу ретінде оқушыға (1) теңдікті дәлелдеуді ұсынамыз.

Элементтері сандар болатын жиынды **сандар жиыны** деп атайды.

Негізгі сандар жиындарын атап өтейік.

Натурал сандар жиыны N арқылы белгіленеді: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Натурал сандар жиынында қосу және көбейту амалдарын орындауға болады.

Бүтін сандар жиыны Z арқылы белгіленеді:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Бүтін сандар жиынында қосу, азайту және көбейту амалдарын орындауға болады.

Рационал сандар жиыны Q арқылы белгіленеді:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\}.$$

Рационал сандар жиынында барлық төрт арифметикалық амалдарды (нөлге бөлуден басқа) орындауға болады.

Периодты емес ақырсыз ондық бөлшекті **иррационал сан** деп атайтыны мектеп курсынан белгілі.

Рационал сандар жиыны мен иррационал сандар жиынының бірігуі **нақты сандар** жиынын құрайды және оны R арқылы белгілейді. Нақты сандар жиынында барлық арифметикалық амалдарды орындауға (бөлу үшін, бөлгіш нөл емес), теріс емес сандардың кез келген рационал дәрежелі түбірін табуға болады.

Аталған жиындар үшін келесі енгізулер орындалады:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

4.1.3. Кейбір математикалық логика символдары.

Математикалық сөйлемдерді, үнемділік және ыңғайлылық үшін, логикалық символдарды қолданып жазады. Біз тек жиі қолданылатын ең қарапайым логикалық символдарды ғана келтіреміз.

$\alpha, \beta, \ldots$ қандай да бір айтылымдар (пікірлер), яғни, әрқайсысы туралы «шын» немесе «жалған» деп айтуға болатын хабарлы сөйлемдер болсын. Басқаша айтқанда, α пікірі келесі екі мәннің бірін ғана қабылдайды: «**шын**» немесе «**жалған**». Кейде «шын» – 1, ал «жалған» – 0 арқылы белгіленеді. Күрделі айтылымдар құрау үшін көбінесе келесі бес логикалық символ пайдаланылады: $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

1) $\rceil\alpha$ немесе $\overline{\alpha}$ жазуы, «α пікірі теріс (орындалмайды)» дегенді білдіреді, ($\rceil$ – терістеу символы). Мұнда: $\alpha = 1$ болса $\overline{\alpha} = 0$, ал $\alpha = 0$ болса $\overline{\alpha} = 1$.

2) $\alpha \wedge \beta$ жазуы: «α және β» дегенді білдіреді ($\wedge$ – ***конъюнкция*** символы). Мұнда: $\alpha = 1$, $\beta = 1$ болса $\alpha \wedge \beta = 1$, ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \wedge \beta = 0$.

3) $\alpha \vee \beta$ жазуы: «α немесе β» дегенді білдіреді ($\vee$ – ***дизъюнкция*** (ажырастық, бытыраңқылық) символы). Мұнда: $\alpha = 0$, $\beta = 0$ болса $\alpha \vee \beta = 0$, ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \vee \beta = 1$.

4) $\alpha \Rightarrow \beta$ жазуы: «α айтылымынан β айтылымы шығады», немесе қысқаша «α-дан β шығады» дегенді білдіреді. ($\Rightarrow$ – ***импликация*** символы. Мұнда: $\alpha = 1,\ \beta = 0$ болса $\alpha \Rightarrow \beta\ = 0,$ ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \Rightarrow \beta\ = 1.$

5) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ жазуы: «α айтылымы β айтылымына парапар (эквиваленттi)», басқаша айтқанда, $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ импликацияларының екеуі де орындалады дегенді білдіреді ($\Leftrightarrow$ – парапар символы). Мұнда: $\alpha = 1,\ \beta = 1$ немесе $\alpha = 0,\ \beta = 0$ болса $\alpha \Leftrightarrow \beta\ = 1,$ ал α мен β-ның басқа мәндерінде $\alpha \Leftrightarrow \beta\ = 0.$

$\forall x \in A: \alpha(x)$ жазуы: «*A* жиынының кез келген *x* элементі үшін α қасиеті орындалады» дегенді білдіреді ($\forall$ – **жалпылық** кванторы). $\forall$ кванторы ауызша тұжырымдарда: «барлық», «кез келген», «әрбір» деген сөздерді ауыстырады. $\forall$ белгісі ағылшынның «*Any* – барлық» деген сөзінің бірінші әріпінің төңкеріліп жазылуы.

$\exists x \in A: \alpha(x)$ жазуы: «*A* жиынында α қасиеті орындалатындай *x* элементі табылады (бар) дегенді білдіреді ($\exists$ – **бар болу** кванторы). $\exists$ кванторы: «бар», «табылады» деген сөздер орнына қолданылады. $\exists$ белгісі ағылшынның «Existence – бар» деген сөзінің бірінші әрпінің теріс аударылып жазылуы.

Мысалы, «кез келген $x \in R$ саны үшін $x + y = 3$ теңдігі орындалатын $y \in R$ саны табылады» деген сөйлемді логикалық символдар арқылы $\forall x \in R,\ \exists y \in R:\ x + y = 3$ деп жазуға болады.

Егер $\alpha(x)$ қасиеті орындалатындай $x \in A$ элементі бар және ол жалғыз болса, онда $\exists\ !x \in A : \alpha\ (x)$ деп жазады.

Теорема туралы. Егер теорема $1)\,\alpha \Rightarrow \beta$ импликациясы түрінде тұжырымдалса, онда α – теорема **шарты**, ал β – теореманың **қорытындысы** деп аталады.

Осы $1)\,\alpha \Rightarrow \beta$ теоремасына қатысты үш теорема құрастыруға болады: $2)\,\beta \Rightarrow \alpha$ - кері теорема; 3) $\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}$ – қарама-қарсы теорема; 4) $\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}$ - кері теоремаға қарама-қарсы теорема.

Теоремаларды дәлелдеуде жиі қолданылатын әдіс – «қарсы жору» әдісі. Оның негізінде келесі ***контрапозиция*** деп аталатын заң жатыр: $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$ немесе $(\beta \Rightarrow \alpha) \Leftrightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta})$.

Ал $\alpha \Rightarrow \beta$ теоремасы орындалғанмен оған кері $\beta \Rightarrow \alpha$ теорема (ендеше қарама қарсы $\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}$ теорема да) орындалмауы мүмкін. Егер $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ өзара кері теоремалары орындалса, онда ол екеуін біріктіріп, **критерий** деп аталатын $\alpha \Leftrightarrow \beta$ түріндегі теорема алуға болады. Бұл жағдайда α-ның орындалуы үшін β-ның орындалуы **қажетті** және **жеткілікті** болады. Мұндай теореманы **анықтама** ретінде де қолданады, өйткені α бойынша β (немесе β бойынша α) анықталады.

Мысал.

1) *Егер төртбұрыш-ромб болса, онда бұл төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр*.

Бұл $\alpha \Rightarrow \beta$ түріндегі теоремада: α – «төртбұрыш – ромб», β – «бұл төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр». Ал оған кері $\beta \Rightarrow \alpha$ түріндегі теорема: «*Егер төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр болса, онда ол – ромб*», әрине орындалмайды. Бірақ контрапозиция заңына сүйеніп оған пара пар $\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}$ түріндегі теореманы ала аламыз: «*Егер төртбұрыштың диогоналдары өзара перпендикуляр болмаса, онда ол ромб емес*».

2) *Егер санның соңғы цифры екіге бөлінсе, онда ол жұп сан.*

Бұл $\alpha \Rightarrow \beta$ түріндегі теоремаға кері $\beta \Rightarrow \alpha$ түріндегі келесі теорема да орындалады: «*Егер сан жұп болса, онда оның соңғы цифры екіге бөлінеді*». Ендеше, осы $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ түріндегі екі теореманы біріктіріп $\alpha \Leftrightarrow \beta$ түрінде, келесі критерийді жаза аламыз: «*Сан жұп болуы үшін, оның соңғы цифры екіге бөлінуі қажетті және жеткілікті*».

4.1.4. Кесінді, интервал (аралық), шенелген жиын.

R нақты сандар жиынының ішжиындары үшін келесі белгілеулер жиі қолданылады: $[a,b] \equiv \{x \in R : a \le x \le b\}$, яғни $a \le x \le b$ қос теңсіздігін қанағаттандыратын нақты сандар жиыны **кесінді** немесе

сегмент деп аталады да $[a,b]$ арқылы белгіленеді. Дербес жағдайда, $[-a,\ a]$кесіндісін, яғни $\{x\in R:-a\le x\le a\}$ жиынын $\{x\in R:\ |x|\le a\}$ арқылы да белгілейді. Бұл – координаттың бас нүктесінен қашықтығы a дан аспайтын нақты сандар жиыны ($|x|\equiv|x-0|$ координаттың бас нүктесінен x нүктеге дейінгі қашықтықты көрсетеді).

Осы сияқты, $(a,b)=\ \{x\in R:a<x<b\}$ – **интервал (аралық),** ал $[a,b)=\{x\in R:a\le x<b\}$ немесе $(a,b]\ =\{x\in R:a<x\le b\}$ – **жартылай интервал (аралық)** деп аталады.

Кесінді, интервал және жартылай интервалдар – **интервалдар (аралықтар)** деп аталады.

Көп жағдайда R нақты сандар жиынын «плюс ақырсыздық» және «минус ақырсыздық» деп аталатын, сәйкес $+\infty$ және $-\infty$ символдарымен толықтырып алып қолданған пайдалы. Бұл екі ақырсыздық үшін келесі қатыстар орындалады (§ 4.4 қараңыз):

$+\infty=+\infty$; $-\infty=-\infty$; $-\infty<+\infty$; $\forall a\in R:\ -\infty<a<+\infty$ – ***реттік қатыстар***;

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty;\quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty;$$

$$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty;\quad (+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty;$$

$$\forall a\in R:\ \ a+(+\infty)=+\infty+a=+\infty,\ \ -\infty+a=a+(-\infty)=-\infty;$$

$$\forall a>0:\ \ a\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot a=+\infty,\qquad a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=-\infty;$$

$$\forall a<0:\ \ a\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot a=-\infty,\qquad a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=+\infty;$$

Бұл екі ақырсыздықты $a\in R$ ***нақты (ақырлы) сандарынан*** ерекшелеп ***ақырсыз сандар*** деп атайды.

$-\infty$ және $+\infty$ ақырсыз сандарымен толықтырылған R нақты сандар жиыны ***кеңейтілген нақты сандар жиыны*** немесе ***кеңейтілген сандар өсі*** деп аталады да, $\overline{R}$ арқылы белгіленеді: $\overline{R}=R\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$.

Келесі **ақырсыз интервалдарды** жазып көрсетейік:

$$(-\infty; a] = \{x \in R : x \le a\}; \qquad [-\infty; a] = \{-\infty\} \cup (-\infty; a];$$
$$(-\infty; a) = \{x \in R : x < a\}; \qquad [-\infty; a) = \{-\infty\} \cup (-\infty; a);$$
$$[a, +\infty) = \{x \in R : x \ge a\}; \qquad [a; +\infty] = [a; +\infty) \cup \{+\infty\};$$
$$(a, +\infty) = \{x \in R : x > a\}; \qquad (a; +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$
$$R \equiv (-\infty; +\infty) = \{x \in R : -\infty < x < +\infty\};$$
$$\overline{R} = [-\infty; +\infty] = \{-\infty\} \cup (-\infty; +\infty) \cup \{+\infty\}.$$