15 дәріс

Дәріс тақырыбы: **1 - ретті дербес туындылы теңдеулер жөнінде түсінік. Бірінші ретті дербес туындылы ДТ. Коши есебі. Екі тәуелсіз айнымалы жағдайындағы Коши есебі шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теорема. Интегралдау.**

Жоспар

1. 1-ретті дербес туындылы сызықты теңдеулер.
2. Жүйенің алғашқы интегралы.
3. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі және оларды шешу.
4. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулер және оларды шешу әдісі.
5. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеу үшін қойылған Коши есебінің интегралдануы.

1. 1-ретті дербес туындылы сызықты теңдеулер

$$F\left(x_1,...,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x},...,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{1}$$

теңдеу берілсін, мұнда $x_1,...,x_n$ $D\subset R^n$ облысында тәуелсіз айнымалылар, $z=z(x_1,...,x_n)$- үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал F өз аргументтерінің берілген функциясы. Осындай теңдеу 1-ретті дербес туындылы теңдеу деп аталады.

Бұл теңдеулерді шешу мәселесі, сипаттаушы жүйе деп аталатын жай дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешімге келтірілетінін көрсетейік. Алдымен, мұны сызықтық теңдеулер үшін қарастырайық.

1-ретті жай дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы шешімі бір ғана кез келген тұрақты шамаға байланысты, ал жүйе үшін n кез келген тұрақтыға байланысты болатыны жоғарыда айтылған еді. Ал, дербес туындылы теңдеулер теориясында, 1-ретті теңдеудің жалпы шешімі бір ғана кез келген функцияларға, n-ретті теңдеудің жалпы шешімі п кез келген функцияларға байланысты болады. Бұл мәселелерге жалпы түрде С. Ковалевскаяның шешімнің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теоремасы жауап бере алады.

Мысалы:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^y+(x+1)y,\ z=z(x,y)=x^2e^y+(x+1)\frac{y^2}{2}+c(x),\quad \forall c(x)$$

Ескерту. Дербес туындылы теңдеулер теориясында, сонымен бірге дербес туындылы теңдеулер жүйесі қарастырылады. Осы жағдайды дербес туындылы 1-ретті жүйе үшін қарастырайық.

(1) теңдеудің сызықтық болған жағдайындағы 2 түрін қарастырайық.

1) біртекті сызықтық түрі:

$$a_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+...+a_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \tag{2}$$

мұнда $a_1,...,a_n - D\subset R^n$ облысындағы кейбір функциялар;

2) біртекті емес сызықтық түрі:

$$a_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+...+a_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=b(x,...,x,z), \qquad (3)$$

мұнда $x_1,...,x_n -$аргумент, z - ізделінетін функция, $a_1,...,a_n,b-D=D\times J-$да анықталған функциялар, мұнда $J-z-$тің өзгеру облысы, ал $D-x_i-$дің өзгеру облысы.

Біздің мақсатымыз, жоғарыдағы теңдеулердің D облысында $\varphi(x_1,...,x_n)$ жалпы шешімін табу, егер мына төмендегі шарттар орындалатын болса:

1) функцияның өзі және оның барлық дербес туындылары үзіліссіз;

2) (1) теңдеуге қойғанда сол жағы 0-ге тепе-тең болуы қажет. Мұнда бұрынғыдай интегралдық қисықтар емес, беттер болады. 2)-ні қарастырайық, мұнда біріншіден, D облысында $a_1,...,a_n$ коэффициенттері өздері 1-ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз, екіншіден, әрбір $(x_1,...,x_n)\in D$ нүктесінде $|a_1|+...+|a_n|>0$ теңсіздігі орындалады деп жоримыз. Енді D облысында қосымша

$$\frac{dx_1}{a_1}=...=\frac{dx_n}{a_n} \qquad (4)$$

жай дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық. (4) жүйе дифференциалдық жағдайда симметриялық түрдегі сипаттаушы жүйе деп аталады да, ал n-1 теңдеуден тұрады. (4) жүйені былайша түсіну қажет: кез келген $A_0(x_{10},...,x_{n0})\in D$ нүктесін алайық.

2)-шарт бойынша, бұл нүктеде ең жоқ дегенде коэффициенттерінің біреуі $a_i\neq 0$, сондықтан, A_0 нүктесінде үздіксіз болғандықтақ ол $U_{A_0}\in D$ аймағы болады да, онда

$$a_i\big|_{U_{A_0}}\neq 0.$$

U_{A_0} аймағында (4) жүйені былай түсіну керек, алдымен оны былайша жазайық:

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_i}{a_i},...,\frac{dx_{i-1}}{a_{i-1}}=\frac{dx_i}{a_i};\ \ \frac{dx_{i+1}}{a_{i+1}}=\frac{dx_i}{a_i},...,\frac{dx_n}{a_n}=\frac{dx_i}{a_i}. \qquad (5)$$

(5) жүйеде x_i-лерді аргумент ретінде, ал $x_1,...,x_n-x_i-$лердің ізделетін функциясы деп қарастырамыз. Онда (5)-ті қайтадан былай жазуға болады:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dx_i}=\frac{a_1(x_1,...,x_n)}{a_i(x_1,...,x_n)}=f_1(x_1,...,x_n),\\
&-----------------------\\
&\frac{dx_{i-1}}{dx_i}=\frac{a_{i-1}(x_1,...,x_n)}{a_i(x_1,...,x_n)}=f_{i-1}(x_1,...,x_n),\\
&-----------------------\\
&\frac{dx_n}{dx_i}=\frac{a_n(x_1,...,x_n)}{a_i(x_1,...,x_n)}=f_n(x_1,...,x_n).
\end{aligned} \qquad (6)$$

U_{A_0} аймағында (5) және (6) жүйелер өзара пара-пар. Енді осы жүйе үшін кез келген бір кіші тұйықталған $U_{A_0} \in \overline{U}_{A_0}$ аймағында Пикар теоремасының орындалатынын көрсетейік.

Шындығында ешқандай f_i – лерсіз-ақ $f_1,..., f_n$:

а) x бойынша үзіліссіз екені;

в) әрбір функция $x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1},...,x_n$ бойынша Липшиц шартын қанағаттандыратыны орындалады.

Бұл үшін әрбір функцияның дербес туындылары $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_m}$ $(\forall k, m = (1, n), k \neq i)$ үзіліссіз және кейбір аймақта шектелген болуы жеткілікті.

Мына қатынасты алайық: $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} = \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{a_k}{a_i}\right) = \dfrac{\dfrac{\partial a_k}{\partial x_m} a_i - \dfrac{\partial a_i}{\partial x_m} a_k}{a_i^2}$,

мұнда, шарт бойынша, $a_1,...,a_n$ коэффициенттері өздерінің дербес туындылары мен бірге үзіліссіз болғандықтан, бөлшектің алымы мен бөліміндегі шамаларда үзіліссіз функциялар болады. Сондықтан, кез келген компакты тарылу болса да, $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_m}$ үздіксіз болып шығар еді, демек ол Вейерштрасс теоремасы бойынша $\overline{U}_{A_0}$ – де шектелген, бұған қоса бұл аймақта f_k функциясының әрқайсысы Липшиц шартын қанағаттандырады. Демек, $B \in \overline{U}_{A_0}$ әрбір нүкте арқылы (6) немесе (5)-тің бір ғана шешімі өтеді. Бұл аймақтардың жинағы сайып келгенде, D облысын жабатын болады.

2. *Жүйенің алғашқы интегралы.*

Анықтама. D^* облысында жай дифференциалдық теңдеулердің кез келген жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1,..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1,..., y_n), \end{cases} \tag{7}$$

және Пикар теоремасының шарттарын қанағаттандыратын болсын. (7) жүйенің алғашқы интегралы деп, әрбір шешім үшін тұрақты мәнін сақтайтын $\varphi(x, y_1,..., y_n)$ функциясын айтады, яғни, егер $y_1(x),..., y_n(x)$ (7) жүйенің шешімі болса, онда тандап алынған шешуге байланысты $\varphi[(x, y_1(x),..., y_n(x))] \equiv C$ болатындай C тұрақты бар болады.

Бізге анализден көп өлшемді түріндегі айқындалмаған функция жөніндегі теорема туралы кейбір мағлұматтар қажет.

1) Айталық $\begin{matrix}\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x, y_1, \ldots, y_n)\end{matrix}$ кез келген k функциялар (7) жүйенің бастапқы интегралдары болсын дейік. Осы жоғарыдағы функциялар тәуелді (сызыкты түрде емес, функционалдық түрде) болады, егер

$$G[\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_k(x, y_1, \ldots, y_n)] \equiv 0$$

болатындай функция бар болса. Негізінде сызықтық тәуелділік $\boldsymbol{G}$ - сызықтык функция болған жағдайдың дербес түрі. Кері жағдайда функциялар тәуелсіз.

2) (7) жүйенің Пикар теоремасының шарттары орындалғанда n тәуелсіз алғашқы интегралдары болады.

3) Көп өлшемді түріндегі айқындалмаған функция жөніндегі теорема. Енді (2) теңдеудің жалпы шешімін құруға көшейік. Айталық, (4) жүйенің белгісіз (n-1) бастапқы интегралдары

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = C_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1},$$

болсын дейік. Бұл жағдайда, (2) теңдеу жалпы шешімінің

$$z = f[\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)] \tag{8}$$

(мұнда $f-$кез келген дифференциалданатын функция) формуласы арқылы берілетінін көрсетейік. Шынында, (4) жүйенің әрбір интегралдық қисығының бойымен $df = 0$ болар еді, өйткені әрбір интегралдық қисық бойында $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ алғашқы интегралдар тұрақты мәндер қабылдайтыны белгілі, демек әрбір интегралдық қисық бойында (7)-нің оң жағы да тұрақты шама болар еді. Сондықтан,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n-1}} d\varphi_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n\right] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n-1}}\left[\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} dx_n\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\varphi_{n-1}}{\partial x_1}\right] dx_1$$
$$\ldots + \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}\right] dx_n \to \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_n} dx_n = 0 \tag{9}$$

(4) жүйенің интегралдық қисықтарында

$$dx_1 = \lambda a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dx_n = \lambda a_n$$

Осыны (9)-ға қойсақ

$$\lambda\left(a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0$$

шығады, мұнда $\lambda \neq 0$ аламыз, өйткені (4)-те алымдары ноль болар еді.

Сонымен, (8) сияқты кез келген дифференциалданатын f функциясы (2)-ні қанағаттандыратын болып шықты, яғни (4) жүйе интегралдық қисықтарында (2) теңдеудің шешімі болады деген сөз.

Енді осындай функция барлық D облысында шешімі болатыньщ көрсету қажет.

Жоғарыда көрсетілгендей, (4) үшін шешімінің бар болуы мен жалғыздығы бойынша, кез келген $A \in \operatorname{int} D$ нүктесі арқылы жалғыз ғана интегралдық қисық өтеді және (4)-тің интегралдық қисықтарының жиынтығы D облысын жабатын болады. Сонымен, бірінші, бөлімі дәлелденді. Енді екінші бөлімің яғни (8)-ден (2)-нің барлық шешімдерін алуға болатынын көрсетейік.

Айталық, $z = \psi(x_1,...,x_n)$ (2)-нің D облысындағы кез келген шешімі болсын дейік. Осыны (8) түріндегі формуладан алуға болатынын дәлелдейік.

Дәлелденген бірінші бөлімге сәйкес, (4) кез келген алғашқы интеграл (2)-нің шешімін береді, демек (2) үшін n шешім аламыз:

$$
\begin{aligned}
&z = \psi(x_1,...,x_n),\\
&z = \varphi_1(x_1,...,x_n),\\
&-----------\\
&z = \varphi_{n-1}(x_1,...,x_n),
\end{aligned}
$$

Бұлар шешім болғандықтан (2)-ні тепе-теңдікке айналдыратын болады:

$$
\begin{aligned}
&a_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + ... + a_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0\\
&a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + ... + a_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \equiv 0\\
&-----------------\\
&a_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + ... + a_n \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \equiv 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

(10)-ды $a_1,...,a_n$ айнымалылар бойынша біртекті сызықтық жүйе ретінде қарастырамыз. (2)-де $a_1,...,a_n$ шамаларына қойылған шарттарға сәйкес әрбір $A \in \operatorname{int} D$ нүктесінде ең жоқ дегенде коэффициенттерінің біреуі нольге тең емес, яғни кез келген $A \in \operatorname{int} D$ нүктесінде (10) жүйенің шешімі нольдік емес, онда алгебраның осыған сәйкес теоремасы бойынша, анықтауышы нольге тең болуы керек:

$$
d = \begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\\
---------\\
\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}
\end{vmatrix}
\tag{11}
$$

Мұнда айқындалмаған функция жөніндегі бұрынырақ келтірілген теорема бойынша, $\psi, \varphi_1,...,\varphi_{n-1}$ функцияларының өзара функционалдық байланысы болады, яғни $F(\psi, \varphi_1,...,\varphi_{n-1})$:

$$F\left[\psi\left(x_1,...,x_{n-1},x_n\right),\varphi_1\left(x_1,...,x_n\right),...,\varphi_{n-1}\left(x_1,...,x_n\right)\right]=0 \qquad (12)$$

Алғашқы интегралдар $\varphi_1,...,\varphi_n$ тәуелсіз болғандықтан, (11)-де ең жоқ дегенде n-1 ретті оның соңғы n-1 жазық жолында орналасқан бір минор $\neq 0$, демек (12) ψ бойынша айқындалады (айқындалмаған функция жөніндегі теорема бойынша), яғни $\psi\left(x_1,...,x_n\right)=f\left[\varphi_1\left(x_1,...,x_n\right),...,\varphi_{n-1}\left(x_1,...,x_n\right)\right]$, мұнда f - кейбір дифференциалданатын функция. Дәлелдеу керегі де осы еді. Енді (3) біртекті емес сызықтық теңдеуді қарастырайық. Бұл жағдайда $a_1,...,a_n$ коффициенттері ізделетін функцияларға тәуелді болады (ылғи осылай болмауы да мүмкін).

Біздің мақсатымыз - шешу әдісіне қолайлы теңдеу құру.

Идеясы. (2) түріндегі теңдеуді шешуге қолданылған әдіске келтіреміз, атап айтқанда жалпы шешімін

$$u\left(x_1,x_2,...,x_n,z\right)=0 \qquad (13)$$

айқындалмаған түрінде іздейміз, мұнда $\widetilde{D}=D\times J$ облысында

$$\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$$

Ескерту: (13) форма үшін $\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$ шарт азырақ, себебі ерекше деп аталатын $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ болғандағы шешімдер қарастырылмайтын болып отыр.

Дегенмен, (13)-ке қойылған аздау шарттың өзі шешулер класының көбін қамтиды. Айталық, (13)-тің шешімі бар болсын, онда $u\left(x_1,...,x_n,z\left(x_1,...,x_n\right)\right)\equiv 0$ болар еді.

Осы тепе-теңдікті $x_1,...,x_n$ бойынша дифференциалдасақ:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$$

$\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$ шартын пайдалансақ:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

$$-------\qquad (14)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

Осы жүйені (3)-ке қойып, ортақ бөлімге келтіріп, барлық мүшелерін бір жаққа шығарсақ, мынау шығады:

$$a_1(x_1,...,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+a_n(x_1,...,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial x_n}+b(x_1,...,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (15)$$

(15) теңдеу сызықтық біртекті, мұнда $x_1,...,x_n,z-$аргументтер, ал $u=u(x_1,...,x_n,z)-$ ізделінетін функция. Сондықтан да, мұны интегралдау (2) теңдеуге де қолданылады.

Теорема. Айталық, (3) теңдеудің $a_1,...,a_n$ коэффициенттері өздерінің бірінші ретті $\tilde{D}$ облысындағы дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болсын және ең жоқ дегенде коэффициенттерінің біреуі нольден өзгеше болсын. Онда (3) тендеудің шешімі төмендегі формуламен беріледі:

$$U= f[\varphi_1(x_1,...,x_n,z),...,\varphi_n(x_1,...,x_n,z)]=0,$$

мұнда $f-$кез келген дифференциалданатын функция, ал $\varphi_1,...,\varphi_n$(3) сипаттаушы жүйенің тәуелсіз алғашқы интегралдары.

Есеп. Дәлелденген теоремалардағы қойылған шарттарды қанағаттандыратын (2) немесе (3) теңдеулер берілсін. Оған қоса кеңістікте (n = 2 немесе 3) параметрлік түрде немесе кез келген басқа бір тұрде, мәселен:

$$\begin{array}{ll} x_1=d_1(f), & \\ ------ & f\in J; \\ x_n=d_n(f), & \end{array}$$

түрінде кейбір қисық берілсін. Егер n = 3 болса, онда екі жазықтықтың қиылысуы түзу сызық береді.

3. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі және оларды шешу

1. Белгісізді табу әдісі.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін белгісіздерді табу жолымен бір теңдеуге (кейде әрбіреуінде бір белгісізі бар бірнеше теңдеуге) келтіруге болады.

Мысал. Келесі теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$y'=\frac{z}{x},\quad z=\frac{(y-z)^2+xz}{x^2} \qquad (1)$$

Шешуі. Берілген теңдеуден z функциясын табамыз. Бірінші теңдеуден алатынымыз: $z=xy'$. Екінші теңдеуге қойып, ықшамдағаннан кейін $x^3y''=(y-xy')^2$ теңдеуін аламыз.

Берілген (1) теңдеулер жүйесі екінші ретті теңдеудің біріне келтірілген. Бұл теңдеу жоғарыда айтылған (ретін төмендету жолымен) әдістермен шешілуі мүмкін. Бұл теңдеуден y табылғанна кейін $z=xy'$ теңдігін қолдана отырып z функциясын табу керек.

2. Интегралданатын комбинацияларды іздеу әдісі.

Белгісіздерді табу жолымен теңдеулер жүйесін шешу барысында әдетте жоғары ретті теңдеу алынады, сондықтан көп жағдайларда, жүйені интегралданатын комбинацияны іздеу жолымен шешу қолайлы.

Мысал. Жүйені шешу керек

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xz}. \tag{2}$$

Шешуі. (2) жүйе симметриялық түрде жазылған. Алғашқы екі бөлшек интегралданатын комбинацияны құрайды. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$ теңдігін $\frac{1}{z}$ -ке қысқартып, интегралдай отырып, бірінші интегралды аламыз

$$\frac{x}{y} = C_1. \tag{3}$$

Екінші интегралданатын комбинацияны алу үшін тең бөлшектердің келесі қасиетін пайдаланамыз:

егер $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = t$, онда кез келген $k_1, k_2, \ldots, k_n$ үшін аламыз:

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n} = t$$

Бұл қасиеттерді қолдана отырып, (2) жүйеден алатынымыз:

$$\frac{y \cdot dx + x \cdot dy}{y \cdot xz + x \cdot yz} = \frac{dz}{-xy}; \quad \frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{-xy}; \quad d(xy) = -2zdz.$$

Сәйкесінше,

$$xy + z^2 = C_2 \tag{4}$$

Шындығында, алғашқы (3) интеграл мен (4) интеграл тәуелсіз. Жүйе шешілді.

Интегралданатын комбинацияны іздеудің орнына алғашқы (3) интегралдың көмегімен (2) жүйеден белгісіздердің біреуін, мысалға, x-ті табуға болады. (3) теңдіктен $x = C_1 y$ теңдігін аламыз. (2) жүйенің екінші теңдеуіне қойып, келесі теңдікті аламыз: $\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-C_1 y^2}$. Бұдан $-C_1 y dy = z dz$; $z^2 = -C_1 y^2 + C_2$. Бұл өрнекке (3) теңдіктен C_1 тұрақтысының мәнін қою арқылы тағы да бір интегралды аламыз: $z^2 + xy = C_2$.

4. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулер және оларды шешу әдісі.

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_1} = b, \tag{1}$$

(мұндағы $a_1, \ldots, a_n$, b $x_1, \ldots, x_n, z$ айнымалыларынан тәуелді),

түріндегі дербес туындылы теңдеулерді шешу үшін келесі қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін жазу керек:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \tag{2}$$

және осы жүйенің n тәуелсіз алғашқы интегралдарын табу керек, яғни

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1,...,x_n,z)=C_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(x_1,...,x_n,z)=C_n.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

(1) түрдегі жалпы теңдеудің айқындалмаған түрі келесі түрде жазылады:

$$F(\varphi_1,...,\varphi_n)=0 \qquad (4)$$

мұндағы F - кез келген дифференциалданатын функция.

Дербес жағдайда, егер z (3) – түріндегі алғашқы интегралдың тек біреуіне ғана кіретін болса, мысалға, соңғысына, онда жалпы шешім келесі түрде жазылады:

$$\varphi_n(x_1,...,x_n,z)=f(\varphi_1,...,\varphi_{n-1}), \qquad (5)$$

мұндағы f - кез келген дифференциалданатын функция. (5) теңдікті z - ке қатысты шеше отырып, (1) теңдеудің айқындалған түрдегі жалпы шешімін аламыз.

Мысал. Келесі теңдеудің жалпы шешімін табу керек:

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x^2.$$

Шешуі. 1). Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін жазамыз:

$$\frac{\partial x}{2x}=\frac{\partial y}{y-x}=\frac{\partial z}{x^2}$$

және интегралданатын комбинацияны іздеу жолымен осы алғашқы екі интегралын табамыз.

2). Бірінші және үшінші бөлшектер келесі интегралдану комбинациясын құрайды:

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dz}{x^2};\Rightarrow xdx=2dz;\Rightarrow \frac{x^2}{2}=2z+C;\Rightarrow x^2-4z=C_1. \quad (*)$$

3). Екінші интегралданатын комбинацияны алу үшін тең бөлшектер қасиетін пайдаланамыз:

$$\frac{dx+dy}{2x+y-x}=\frac{dz}{x^2};\Rightarrow \frac{d(x+y)}{(x+y)}=\frac{dz}{C_1+4z},$$

өйткені (*) теңдігінен

$$x^2=C_1+4z.$$

Сонда

$$\ln|x+y|=\frac{1}{4}\ln|C_1+4z|+\ln C=\frac{1}{4}\ln|x^2|+\ln C;\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{x}=C_2. \qquad (**)$$

4). Алғашқы (*), (**) интегралдарын есепке алғанда, бастапқы теңдеудің жалпы шешімі айқындалмаған бетте келесі түрде жазылады.

$$F(x^2-4z;\frac{(x+y)^2}{x})=0.$$

5. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеу үшін қойылған Коши есебінің интегралдануы.

Төмендегі

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=b(x,y,z) \tag{6}$$

дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын және берілген

$$x=u(t),\quad y=v(t),\quad z=w(t) \tag{7}$$

сызықтары арқылы өтетін $z=z(x,y)$ бетін табу үшін келесі жүйенің ең алғашқы екі тәуелсіз интегралын табу керек:

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{b}. \tag{8}$$

Бұл алғашқы интегралдар

$$\varphi_1(x,y,z)=C_1,\qquad \varphi_2(x,y,z)=C_2, \tag{9}$$

мұндағы x, y, z айнымалыларының орнына, олардың (7) өрнекте t параметрі арқылы берілген мәндерін қойып, келесі екі теңдеуді аламыз:

$$\Phi_1(t)=C_1,\quad \Phi_2(t)=C_2. \tag{10}$$

t параметрін таба отырып, $F(C_1,C_2)=0$ қатынасын аламыз. Мұнда C_1 мен C_2 - тұрақтыларының орына (9) интегралдардың сол жағын қойып, іздеп отырған шешімді аламыз. (10) жүйедегі екі теңдеуге де t параметрі енбеген жағдайда ғана (7) сызықтар (6) жүйенің интегралдық қисықтары болып табылады және Коши есебі шексіз көп шешімге ие болады.

Мысал.

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy, \tag{11}$$

теңдеуінің жалпы шешімін және

$$y=x^2,\ z=x^3. \tag{12}$$

қисықтары арқылы өтетін интегралдық бетін табу керек.

Шешуі. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-xy}$$

және оның алғашқы интегралдарын табамыз:

$$\frac{x}{y}=C_1,\ z^2+xy=C_2. \tag{13}$$

Сәйкесінше, (11) теңдеудің жалпы шешімін айқындалмаған бетте келесі түрде жазамыз

$$F\left(\frac{x}{y},z^2+xy\right)=0$$

мұндағы F - кез келген функция. z (13) алғашқы интегралдың тек біреуіне кіретін болғандықтан, жалпы шешім айқындалған бетте келесі түрде жазылады:

$$z^2 + xy = f\left(\frac{x}{y}\right); \quad z = \pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) - xy} \, ,$$

мұндағы f - кез келген функция. (12) – ші сызықтар арқылы өтетін интегралдық бетті табу үшін бұл сызықтарды параметрлік түрде жазамыз, мысалға, параметр ретінде x - ті алайық, сонда

$$x = x, \; y = x^2, \; z = x^3.$$

Бұл өрнектерді (13) – ке қойып, алатынымыз

$$\frac{1}{x} = C_1, \; x^6 + x^3 = C_2 \cdot$$

x - ті тауып, келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2$$

C_1 және C_2 тұрақтыларының орнына алғашқы (13) интегралдарының сол жағын қойып, іздеп отырған шешімді аламыз:

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.