14 дәріс

Дәріс тақырыбы: **Тұрақты коэффициентті n сызықтық теңдеулерден тұратын жүйені орнықтылыққа зерттеу ережелері**

Жоспар

1. Жүйені орнықтылыққа зерттеу ережелері.
2. Көпмүшеліктің барлық түбірлерінің накты бөліктерінің теріс таңбалы болатын белгілері
3. Жүйені бірінші жуықтауы бойынша орнықтылыққа зерттеу

1. Жүйені орнықтылыққа зерттеу ережелері

13-ші дәрісда (14) жүйенің орнықтылығын жан-жақты зерттеген едік. Бұдан мынадай қорытынды жасауға болады, (14) жүйенің жалпы шешімдерінің түрлеріне байланысты $x \to 0, y \to 0$ ұмтылулары, яғни нүктелер траекториясының бас нүктеге әртүрлі жылдамдықпен жақындап, шүйілуі жүйенің сипаттаушы теңдеулерінің түбірлерінің накты бөліктерінің таңбасына байланысты екен, басқаша айтқанда теріс таңбалы болса орнықты, ал оң таңба болса орнықсыз.

Осы қорытындыға сәйкес жоғарғы ретті коэффициенттері тұрақты жүйелердің орнықтылығын зерттеу үшін ережелер келтіруге болады.

Мына төмендегі жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx_S}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{Sj} x_j \,,\ S = \left(\overline{1,n}\right) \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ nxn өлшемді квадрат матрица.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

A матрицасының анықтауышы, сипаттаушы теңдеу.

1–ереже: Егер (2) сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің накты бөліктері теріс таңбалы болса, онда (1) жүйенің барлық шешімдері жалпы асимптотикалық түрде орнықты.

Себебі, (1) жүйенің жалпы шешіміндегі $e^{\mathrm{Re}\,\lambda_i t}$ көбейткіштері $t \leftarrow \infty$ да нольге ұмтылады, сондықтан $x_j \to 0$;

2–ереже: Егер (2) сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің ең жоқ дегенде біреуінің накты бөлігінің таңбасы оң болса, онда (1) жүйенің барлық шешімдері орнықсыз.

Себебі, (1) жүйе жалпы шешіміндегі бір көбейткіш $\left. e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\right|_{t\to\infty} \to \infty$ болғандықтан $x_j \to \infty$;

3–ереже: Егер (2) сипаттаушы теңдеу түбірлері таза жорамал не нольдерге тең болса, ал қалған түбірлері, егер олар бар болса, нақты бөліктері теріс болғанда, (1) жүйенің барлық шешімдері орнықты, бірақ асимптотикалық орнықтылық болмайды.

Мысалдар:

1)

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2 - x_3;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_3;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 5x_1 - 4x_2;$$

Қысқаша $\frac{dx}{dt} = Ax;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix};\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ жүйені орнықтылыққа зерттеңдер?

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 5 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda + 8 = 0;$$

Бір түбірі $\lambda_1 = 1$ болғандықтан, ереже бойынша $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ шешімі орнықсыз.

2)

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_3 \quad \Delta = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_2 - x_3;$$

$\lambda_1 = -1;\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i;$

Ереже бойынша $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ шешімі асимптотикалық түрде орнықты.

2. Көпмүшеліктің барлық түбірлерінің нақты бөліктерінің теріс таңбалы болатын белгілері

Өткен дәрісларда тұрақты коэффициентті сызықтық теңдеулерді орнықтылыққа зерттеу оның сипаттаушы теңдеуінің түбірлерінің нақты бөліктерінің таңбасын зерттеуге саяды.

Негізінде жоғарғы дәрежелі көпмүшеліктің барлық түбірлерін табу оңай емес. Осыған байланысты дәлелдемесіз төмендегі теоремаларды келтірейік:

1-теорема: Тұрақты коэффициентті көпмүшеліктің барлық түбірлерінің нақты бөліктері теріс таңбалы болу үшін, көпмүшеліктің барлық коэффициенттері бірдей таңбалы болуы қажетті.

Бұл теорема квадраттық көпмүшелік үшін қажетті ғана емес, әрі жеткілікті.

Мәселен

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \tag{3}$$

алайық (немесе $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$, мұнда $a_0 > 0$)

(3) үшін $a_1 > 0;\ a_2 > 0$ шарты қажетті және жеткілікті. Егер z_1 және z_2 түбірлері болса, онда

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -a_1 \\ z_1 \cdot z_2 &= a_2 \end{aligned} \tag{4}$$

$a_2 > 0$ болғандықтан екі түбіріде нақты сандар және олардың таңбалары бірдей болады, ал қосындысы теріс сан болғандықтан $(-a_1)$, екі түбіріде теріс таңбалы.

Ал егер түбірлері комплекстік сандар болса, яғни $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$[z - (\alpha - i\beta)][z - (\alpha + i\beta)] = z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2);$$

Сондықтан $z_1 + z_2 = -a_1 = 2\alpha,\ a_1 > 0$ болғандықтан $\alpha < 0;$

Егер берілген екі теңдеуден тұратын жүйенің немесе 2 – ретті дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{5}$$

болса, онда теңдеуді коэффициенттері бойынша орнықтылыққа зерттеу былайша жүргізіледі:

1. Егер $a_1 > 0,\ a_2 > 0$ болса, онда нольдік шешімі асимптотикалық орнықты.
2. Егер $a_1 > 0,\ a_2 = 0$ болса, онда асимптотикалық орнықтылық болмайды.
3. Егер $a_1 = 0,\ a_2 > 0$ болса (яғни түбірлері таза жорамал), онда нольдік шешімі орнықты, мұнда да асимптотикалық орнықтылық жоқ.

1-теорема жоғарғы дәрежелі көпмүшелік үшін қажет шарт болғанмен жеткілікті бола алмайды, оны мына мысал арқылы көрсетсек жеткілікті.

$z^3+z^2+4z+30=0$ көпмүшеліктің барлық коэффициенттері оң таңбалы, бірақ түбірлері $z_1=-3;\ z_{2,3}=1\pm 3i$ болғандықтан, кейінгі екеуінің нақты бөліктері оң таңбалы. Сондықтан кез келген дәрежедегі көпмүшеліктің түбірлерінің нақты бөлігінің таңбалары теріс болуының шарттарын көрсетейік. Ол үшін

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0;\ a_0>0 \tag{6}$$

алайық.

Гурвиц теоремасы: Нақты коэффициентті (6) көпмүшеліктің түбірлерінің нақты бөліктерінің теріс таңбалы болуы үшін Гурвиц матрицасының барлық бас диагоналдық минорларының оң таңбалы болуы қажетті және жеткілікті.

Гурвиц матрицасын алайық.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

Бас диагоналдық минорлары:

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ldots,\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$ Сонымен негізгі шарт

$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ldots,\Delta_{n-1}>0,\Delta_n>0$ болуы қажетті және жеткілікті.

$\Delta_n=\Delta_{n-1}\cdot a_n$ болатынын еске алсақ, ең соңғы минорды $a_n>0$ мен ауыстыруға болады.

Гурвиц теоремасының шарттарын 2, 3, 4 – дәрежелі көпмүшеліктерге коэффициенттері арқылы қолданылатынын көрсетейік.

а) $P(z)=z^2+a_1z+a_2$

$a_1>0,\ a_2>0$

б) $P(z)=z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$

$a_1>0;\ a_1a_2-a_3>0,\ a_3>0$

в) $P(z)=z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4$

$a_1>0,\ a_1a_2-a_3>0;\ (a_1a_2-a_3)a_3-a_1^2a_4>0,\ a_4>0$

(6) – де $a_0>0$ болса, басқа барлық коэффициенттерді Гурвиц шарты бойынша оң таңбалы болатынын еске алайық.

Мысал:

1) $y^{IV}-2y^{III}+5y^{II}+y^{I}+10y=-3x^2;$

Теңдеудің барлық шешулері орнықсыз, себебі сипаттаушы теңдеу коэффициенттерінің біреуі теріс таңбалы.

2) $y^{IV} + y^{III} + 10y^{II} + y^{I} + 2y = 8x^2$;

Барлық шешулері асимптотикалық орнықты, себебі

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 9 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 > 0;$$

3.Жүйені бірінші жуықтауы бойынша орнықтылыққа зерттеу

Мына төмендегі жүйенің нольдік шешімін орнықтылыққа зерттеу керек болсын:

$$\frac{dx_S}{dt} = X_S(t, x_1, x_2, ..., x_n), \quad \left(S = \overline{1, n}\right) \tag{8}$$

Мұнда $X_S(t,0,0,...,0) \equiv 0$ болатыны белгілі, X_S функцияларының бәрі барлық x_S айнымалылары бойынша кез келген $t \geq t_0$ болғанда бас нүктенің аймағында дифференциалданатын функциялар. Сол себептен де

$$\frac{dx_S}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_S}{\partial x_j} \right)_{x_1 = x_2 = ... = x_n = 0} \cdot x_j + R_S(t, x_1, x_2, ..., x_n) (9)$$

Мұнда R_S – $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ бас нүкте аймағында реті бірден жоғары шексіз аз шамалар $\dfrac{\partial X_S}{\partial x_j} = a_{Sj}(t)$ деп алсақ,

$$\frac{dX_S}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{Sj}(t) \cdot x_j + R_S(t, x_1, x_2, ..., x_n) \tag{10}$$

Жүйенің нольдік шешуі арқылы барлық дербес туындылар $\dfrac{\partial X_S}{\partial x_j}$ тұрақты шамалар болуы мүмкін, яғни

$$\frac{\partial X_S(t,0,0,...,0)}{\partial x_j} = a_{Sj} = const$$

Бұдан әрі былайша пайымдаймыз. Бас нүкте аймағында $|x_i|$ аз шама болғанда (10) жүйенің басты мүшелер сызықтық мүшелері болып есептеледі.

Сондықтан көпшілік жағдайда R_s сызықтық емес мүшелері жүйенің орнықтылығына әсер ете қоймайды деп есептелініп, ол мүшелерді еске алмай (10) жүйені төмендегі жүйемен ауыстыруға болады.

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{Sj}(t) x_j \tag{11}$$

Бұл жүйе (10) жүйенің бірінші жуықтауы деп аталады.

Алғаш рет бұл мәселелерді қарастырған А.М. Ляпунов, ол (10) жүйені қандай жағдайда бірінші жуықтауы бойынша зерттеуге болатынын толық көрсетті.

Практикада зерттеу жұмыстарында көбірек қолданылатын тұрақты коэффициентті стационар жүйені қарастырайық

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j + R_s(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (12)$$

Жоғарғы айтылғандарға байланысты

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j \qquad (13)$$

жүйені аламыз.

Ережелерді қолдансақ:

1) Жүйенің бірінші жуықтауы бойынша алынған сипаттаушы теңдеу түбірлерінің барлығының нақты бөлігі теріс таңбасы болса, нольдік шешуі асимтотикалық түрде орнықты.

2) Жүйенің бірінші жуықтауы бойынша алынған сипаттаушы теңдеу түбірлерінің ең жоқ дегенде біреуінің нақты бөлігі оң таңбалы болса, нольдік шешуі орнықсыз.

Мысалдар: 1^0 $x_1 = 0, x_2 = 0$ шешімінің орнықтығын зертте?

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2 \sin t;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_2^2;$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$$

бірінші жуықтауын аламыз.

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0; \lambda_{1,2} = 1 \pm i;$$

$x = y = 0$ шешімі орнықсыз

$$2^0 - \quad \frac{dx_1}{dt} = x_1 + e^{x_2} - \cos x_2; \qquad \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 + \sin x_2;$$

$$\cos x_2 = 1 - \frac{x_2^2}{2!} + \frac{x_2^4}{4!} - ... \quad \mathrm{e}^{x_2} = 1 + \frac{x_2}{1!} + \frac{x_2^2}{2!} + ...$$

орындарына қойып, бірінші

$$\sin x_2 = \frac{x_2}{1!} - \frac{x_2^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

жуықтауын аламыз. Зерттегенде $x_1 = x_2 = 0$ шешімі орнықсыз.

Егер (13) жүйенің сипаттаушы теңдеулерінің түбірлері нольдер, таза жорамал сандар немесе аралас болып келген жағдайда жүйені бірінші жуықтауы бойынша зерттеуге болмайтынын алғаш рет Ляпунов егжей-тегжей зерттеп, оны критикалық жағдай деп атаған.

Өткен дәрісларда дифференциалдық теңдеуге жүйенің орнықтылығын зерттегенде олардың шешімін тауып және сипаттаушы теңдеу түбірлерінің нақты бөліктерінің таңбасын білу қажет болған. Мұндай әдістер Ляпуновтың тура әдісіне (1-әдісіне) жатады.

Орнықтылық теориясында бұдан басқа 2-әдіс қолданылады, оның идеясы мынада:

Берілген жүйенің шешімін таппай-ақ, оның орнықтылығы оған сәйкес Ляпунов функциясы деп аталатын тұлға арқылы зерттеледі, бұл әдісті ең алғаш рет Ляпунов ұсынған.

Өзін - өзі тексеруге арналған тест тапсырмалары

Келесі теңдеулер жүйесін орнықтылыққа зерттеу керек:

1. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$

A) Асимптотты орнықты
B) Орнықты
C) Орнықсыз
D) Асимптотты орнықсыз
E) Жауабы жоқ

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$

A) Асимптотты орнықты
B) Орнықты
C) Орнықсыз
D) Жауабы жоқ
E) Асимптотты орнықсыз

Ерекше нүктесін анықтаңыз:

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = 2y - 3x \end{cases}$

A) Фокус
B) Түйін
C) Ершік
D) Жауабы жоқ
E) Центр

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.