13 дәріс

***Дәріс тақырыбы:* Орнықтылық теориясы жөнінде негізгі түсініктер. Анықтамалар. Есеп қою мәселесі**

Жоспар

1. Орнықтылық теориясы жөнінде негізгі түсініктер. Есеп қою мәселесі
2. Ляпунов бойынша орнықтылық. Негізгі анықтамалар.
3. Тұрақты коэффициентті 2-ретті сызықтық теңдеулер жүйесін орнықтылыққа зерттеу.

1. Орнықтылық теориясы жөнінде негізгі түсініктер. Есеп қою мәселесі

Орнықтылық теориясының алғашқы мәселелері механикадан шыққан. Белгілі бір математикалық есептерге байланысты қарастырылып отырған механикалық жүйенің барлық қалпы, жағдайы, күйі ылғи да байқала бермейді. Оның себебі, механикалық жүйенің алғашқы күйіне әсер ететін онша байқауға болмайтын күштер не кейбір шағын ауытқулардың әсер етуіне байланысты.

Негізінде жүйенің тепе-теңдік қалпын немесе қозғалысын әртүрлі күштер кейде аз ауытқытады, ал кейде өте күшті ауытқытады.

Ауытқу кезінде дененің (материалдық нүктенің) тепе–теңдік қалпы немесе қозғалысы аз ауытқитын болса, оны орнықты қозғалыс деп, ал көп ауытқитын болса орнықсыз деп атайды.

Есеп қою мәселесі

Материалдық нүктенің кез келген күйі (мәселен, тынышытық қалпы немесе қозғалыстағы күйі) төмендегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы дәл не дәлге жуық бейнеленген болсын дейік

$$\frac{dx_k}{dt} = X_K\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \quad \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{1}$$

мұнда t (уақыт)-тәуелсіз айнымалы, ал $x_1, x_2, ..., x_n$ белгісіз, ізделетін t-ның функциялары. Материалдық жүйенің күйі мына төмендегі шешіммен сипатталытыны белгілі

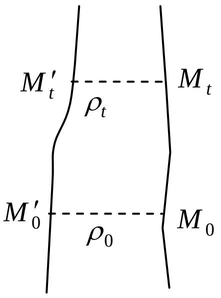
$$x_k = \varphi_k(t) \ \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{2}$$

бұл шешу $t = t_0$ болғанда x_k^0 болады, яғни

$$x_k(t_0) = x_k^0 \ \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

Геометриялық тұрғыдан (2) шешім $\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)$ кеңістігінде бастапқы $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ нүктесі арқылы өтетін интегралдық қисықты өрнектейді.

Егер t бастапқы t_0 мәнінен басқа бір мән қабылдаса, онда ол осы интегралдық қисыққа $M_t\left(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_K(t)\right)$ нүктесі орнын алар еді.



1-сызба

Айталық, бір t_0 мезгілінде жүйеге азуақыт ауытқу әсер етеді дейік (кейбір күштер немесе басқа бір себептер), бұл аз уақыт әсер еткендіктен бастапқы шарттарды ғана өзгертуге мұршасы келеді де, жалпы жүйе жаңа, басқа бір күйде болады. Осы күйіне сәйкес шешім

$$x_K = \varphi_K(t), \ \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{4}$$

болсын дейік. Бұл шешім $t = t_0$ болғанда $x_K^0 + \Delta x_K^0$, яғни

$$\varphi_K(t_0) = x_K^0 + \Delta x_K^0 . \tag{5}$$

(4) шешімге енді M'_0 нүктесінен өтетін басқа бір интегралдық қисық сәйкес келеді де, $t \neq t_0$ бір кезде M'_t нүктесіне айналады. Осы кездегі материалдық жүйеге әсер еткен күш, не бір себептер лезде, қас қаққанша әсер етіп, өзінің әсерін тоқтатты делік. Осы жағдайда жүйе ең алғашқы қалпына келе ме жоқ па? Келмеген жағдайда t_0 бастапқы мезгілдегі $\overline{M_0 M'_0} = \rho_0$ аз шама болғанда, барлық $t \geq t_0$ үшін $\overline{M_t M'_t} = \rho_t$ қашықтығы аз шама бола алама, жоқ па? (18-сызба) Көптеген практикалық есептерді шешкенде, t (уақыт) өте үлкен, тіпті шексіз үлкен мәндер қабылдайтыны ақиқат. Жоғарғы айтылғандарға байланысты дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің ішінен бастапқы шартқа байланысты шешімі аз өзгергенде, кез келген t үшін (t қандай үлкен болсада) одан онша көп өзгермейтін шешімді бөліп ала білу қажет. Осындай шешімдерді біз бұдан әрі Ляпунов бойынша орнықты деп атаймыз. Сонымен есеп былайша қойылады, егер

$$\rho_0 = \sqrt{\sum_1^n \left(\Delta x_k^0\right)^2} \tag{6}$$

өте аз шама болғанда,

$$\rho_t = \sqrt{\sum_1^n \left[x_k(t) - \varphi_k(t)\right]^2} \tag{7}$$

бар $t \geq t_0$ үшін аз шама бола ала ма, жоқ па?

Басқаша айтқанда

$$x_k = \left|x_k(t) - \varphi_k(t)\right| \ \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{8}$$

айырмасының шамасын, өзгеруін қарастыру қажет. Сондықтан (8)-ді қанағаттандыратын төмендегі дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{dx_k(t)}{dt} - \frac{d\varphi_k(t)}{dt} = \Phi_k(t, x_1, x_2, ..., x_n) - \Phi_k(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = \text{немесе}$$

$$= \Phi_k(t, x_1 + \varphi_1, x_2 + \varphi_2, ..., x_n + \varphi_n) - \Phi_k(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, x_2, ..., x_n) \tag{9}$$

жүйе шығады.

2. Ляпунов бойынша орнықтылық. Негізгі анықтамалар.

1-Анықтама. Егер

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \qquad (10)$$

болғанда $X_K \equiv 0$ болғандықтан, (10) жүйенің шешімі болады. Бұдан былай (10) болғанда $x_k \equiv 0$ болатын жүйені ауытқитын қозғалыстын дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп атайды, ал (10) нольдік шешімнің өзін ауытқымайтын қозғалыс деп атайды.

2-Анықтама. $x_k = \varphi_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ Ляпунов бойынша орнықты деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ саны бар болып

$$|x_k(t_0) - \varphi_k(t_0)| < \delta(\varepsilon) \ (k = 1,2,\ldots,n)$$

теңсіздіктер жиынтығынан барлық $t \geq t_0$ үшін

$$|x_k(t) - \varphi_k(t)| < \varepsilon \ (k = 1,2,\ldots,n)$$

шығатын болса.

3-Анықтама. $x_k = \varphi_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ шешімі жалпы орнықты болса, ол асимптотикалық түрде орнықты болады, егер

$$\lim_{t \to \infty} [x_k(t) - \varphi_k(t)] = 0; \qquad (11)$$

Орнықтылық қасиеттері болмайтын барлық басқа шешімдер орнықсыз деп аталады.

Мысал:

$$\frac{dx}{dt} = ax; \qquad (12)$$

теңдеуінің шешімі a тұрақты сан болғанда орнықты, ал $a \leq 0$ болғанда асимптотикалық түрде орнықты, $a > 0$ болғанда орнықсыз.

Себебі, (12) теңдеудің $x(t_0) = x_0$ шартын қанағаттандыратын шешімі

$$x = x_0 e^{a(t - t_0)} \qquad (13)$$

Бұл $a \leq 0$ және $t \geq t_0$ болғанда $e^{a(t-t_0)} \leq 1;$

Сондықтан $t \geq t_0$ болғанда $|x| = |x_0| e^{a(t-t_0)} < \varepsilon$, егер $|x_0| < \varepsilon$ болса

Ал $a < 0$ болғанда $e^{a(t-t_0)}\Big|_{t\to\infty} \to 0$ кез келген x_0 үшін $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0,$

ал $a > 0$ болғанда орнықсыз, себебі $|x_0|$ қандай аз шама болса да (13) шешім $|x(t)| < \varepsilon$ қанағаттандырмайды.

3. Тұрақты коэффицентті 2-ретті сызықтық теңдеулер жүйесін орнықтылыққа зерттеу

Төмендегі екі сызықтық теңдеуден тұратын тұрақты коэффицентті жүйені қарастырайық

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y; \end{cases} \tag{14}$$

Мұның шешімін

$$x = \alpha_1 e^{\lambda t};\ y = \alpha_2 e^{\lambda t} \tag{15}$$

түрінде іздейік

(15)-ті (14)-ке қойып, екі жағын $e^{\lambda t}$-ға қысқартсақ,

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

шығады. (16) жүйенің мардымсыз емес шешімдері болу үшін

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

болу керек. Осы сипаттаушы теңдеуден екі түбір λ_{12} және λ_2 табылатыны белгілі.

Координаттар жүйесінің бас нүктесін ерекше нүкте деп алынатыны белгілі, онымен бірге бас нүктені қозғалыстың тыныштық қалпы деп те атайды.

"Ерекше нүктелерді кластарға бөлу" мәселесінде (14) сияқты жүйенің 2-теңдеуін 1-теңдеуге мүшелей бөлгеннен шыққан теңдеудің интегралдық қисықтарының бас нүктенің аймағында қалай өзгеретіні, орналасуы жөнінде егжей-тегжей айтылған еді.

Сондықтан оларды қайталамай орнықтылықты зерттеуге бірден қолдана береміз.

(14) жүйенің орнықтылығын зерттеу үшін мына жағдайларды қарастырамыз:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ және $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ болсын дейік. Бұл жағдайда (14) жүйенің жалпы шешім

$$\begin{aligned} x &= C_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_{12}e^{\lambda_2 t} \\ y &= C_1\alpha_{21}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_{22}e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{18}$$

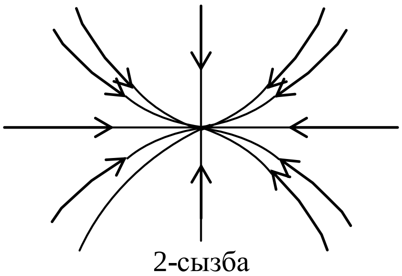
болатыны белгілі.

Мұнда $C_1,\ C_2$-кез келген тұрақтылар;

x және y қосылғыштардағы $e^{\lambda_1 t}\Big|\xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ және $e^{\lambda_2 t}\Big|\xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

болғандықтан, нольге ұмтылады.

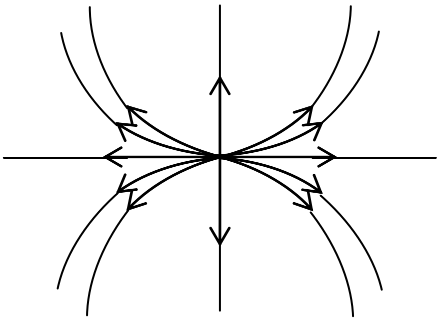
Демек интегралдық қисықтар траекторияның барлық нүктелерінде $x=0, y=0$ тыныштық қалпына (нүктесіне) жуықтайды, шүйіледі. Бұл ерекше нүкте түйін деп аталады, ал қозғалыс жалпы асимптотикалық түрде орнықты. (2-сызба)



2-сызба

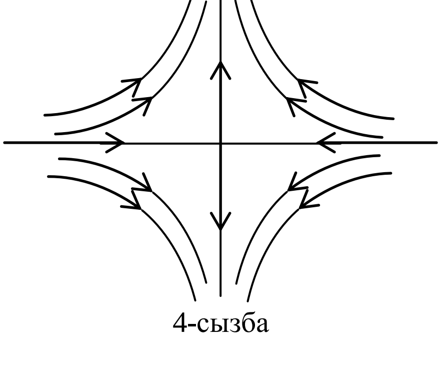
Екі траекториялар сәйкес кез келген тұрақтылар $C_1=0, C_2 \neq 0$ және $C_2=0, C_1 \neq 0$ болғанда түзу сызықтар болатынын еске салайық

2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ және $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ болсын дейік. Нүктелердің қозғалатын траекториясы 1) жағдайдан өзгермейді, өйткені t ны $-t$ мен ауыстырсақ 1)-жағдайды аламыз. Бірақ, нүкте қозғалысының бағыты қарама-қарсы болады, $t \to \infty$ ұмтылғанда траектория арқылы қозғалатын нүктелер бас нүктеден алшақтай, алыстай береді. Бұл жағдайда да түйін, ал $x=0, y=0$ нольдік шешімі орнықсыз болады. (3-сызба)



3-сызба

3) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ (немесе $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$) болса, онда тыныштық нүктесі немесе $x=y=0$ нольдік шешімі орнықсыз, себебі математикалық тұрғыдан (18) жалпы шешімінде x және y бір қосылғыштың есебінен $t \to \infty$ да $x \to 0, y \to 0$ ұмтылады да, траектория нүктелері бас нүктеге жақындай



4-сызба

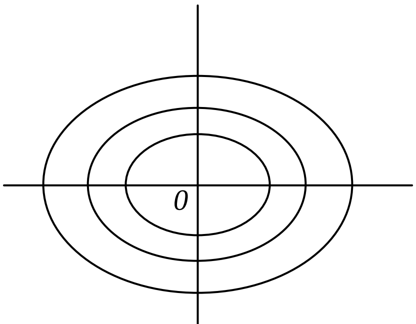
береді, бірақ екінші қосылғыш есебінен $t \to \infty$ да $x \to \infty, y \to \infty$ ұмтылады да, бас нүктеден мейлінше алыстап кетеді. Бұл жағдайда геометриялық тұрғыдан интегралдық қисықтардың бас нүкте аймағында орналасуы ершік (седло) деп аталады. (4-сызба)

4) (17) сипаттаушы теңдеудің түбірлері таза жорамал сандар, яғни $\lambda_{1,2} = \pm qi$ болсын, онда (14) жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos qt + C_2 \sin qt \\ y &= \tilde{C}_1 \cos qt + \tilde{C}_2 \sin qt \end{aligned} \qquad (19)$$

Мұнда $\tilde{C}_1$ және $\tilde{C}_2$ кез келген C_1 және C_2 тұрақтылардың кейбір сызықтық комбинациялары.

Барлық шешулер t-ның периодты функциялары, бұл жағдайда нүкте траекториялары тұйық қисықтар болатыны белгілі, әрі бұлар ерекше нүктені қоршап тұрады. (19)-дағы $C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$-мәндеріне байланысты олар центрі бас нүктеде болатын эллипстер, кейбір жағдайда шеңберлер не басқа бір тұйық қисықтар болуы мүмкін. (5-сызба)



5-сызба

Бұл жолы тыныштық нүктесі центр деп аталады, ал қозғалыс орнықты, өйткені траектория нүктелері кез келген $t > t_0$ болғанда да бас нүктеге жақынырақ келеді, $t \to \infty$ өзінде асимптотикалық орнықтылық жоқ.

5) (17) сипаттаушы теңдеудің түбірлері комплекстік сандар, яғни $\lambda_{1,2} = p \pm qi,\ q \neq 0$ болсын, онда (14) жүйенің жалпы шешімі

$$x = e^{Pt}\left(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt\right)$$
$$y = e^{Pt}\left(\tilde{C}_1 \cos qt + \tilde{C}_2 \sin qt\right) \quad (20)$$

мұнда $\tilde{C}_1$ және $\tilde{C}_2$ кез келген C_1 және C_2 тұрақтылардың сызықтық комбинациялары.

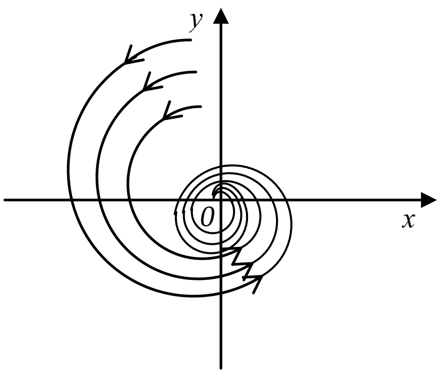
Мына 2 жағдайды жеке қарастырайық

а) $p < 0 \ q \neq 0$

Жоғарыда 4 – жағдайда $(p = 0)$ (20) жалпы шешімнің екінші көбейткіштерінің нүкте траекториялары $x = y = 0$ тыныштық нүктесін қоршайтын тұйық қисықтар болатыны айтылып еді, ал бірінші көбейткіштері $t \to \infty$ да $x \to \infty, y \to 0$, яғни

$$e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j t}\Big|_{t\to\infty} \to 0;$$

Бұл жағдайда (20) дағы екінші көбейткіштердің нүкте траекториялары бас нүктені айналғанда тұйықталмайды, траектория спираль бойынша бас нүктеге жақындай береді. (6-сызба)



6-сызба

(14) жүйенің тыныштық нүктесі, $x = y = 0$ нольдік шешуі жалпы асимптотикалық түрде орнықты, ал интегралдық қисықтардың бас нүкте аймағында орналасуы фокус деп аталады.

б) $p > 0 \ \mathrm{q} \neq 0$

Бұл жағдайда

а) жағдайынан t-ны $-t$-ға айырбастағаннан шығады, демек нүкте траекториясы қарама-қарсы бағытта қозғалады, бас нүктеден спираль бойынша алыстай береді, қозғалыс орнықсыз, ал интегралдық қисықтардың орналасуы бұрынғыша фокус деп аталады.

б) $\lambda_1 = \lambda_2$ еселік түбірлер

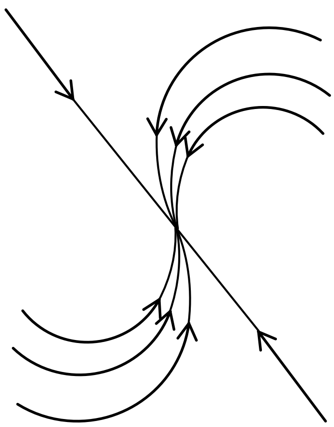
(14) жүйенің жалпы шешуі

$$x = \left(\alpha_1 + \beta_1 t\right)e^{\lambda_1 t}$$
$$y = \left(\alpha_2 + \beta_2 t\right)e^{\lambda_1 t} \quad (21)$$

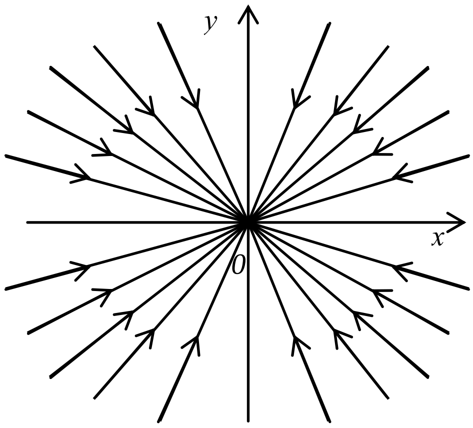
а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Бұл жағдайда барлық траекторияға бас нүктеде ортақ жанама болатын $\beta_2 x - \beta_1 y = 0$ түзуі (7-сызба) пайда болады. Егер $\beta_1 = \beta_2 = 0$ бола қалса, онда

$$x = \alpha_1 e^{\lambda_1 t};\ y = \alpha_2 e^{\lambda_1 t} \quad (22)$$



7-сызба



8-сызба

α_1, α_2-кез келген тұрақтылар, онда нүкте траекториялары $\alpha_2 x - \alpha_1 y = 0$ түзулері (8-сызба) болады.

Бұл екі жағдайда да интегралдық қисықтардың бас нүкте аймағында орналасуы түйін деп аталады, ал қозғалыс $x = y = 0$ нольдік шешімі орнықты, айырмашылығы 8 – сызбадағы түйін дикритикалық түйін деп аталады.

в) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

Нүкте траекторияларының орналасуы а) жағдай сияқты, бірақ траектория бойынша қозғалыс қарама – қарсы, сондықтан қозғалыс $x = y = 0$ нольдік шешімі орнықсыз.

Мысалдар: Мына төмендегі жүйелерді орнықтылыққа зертте?

1)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - y; \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y; \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0; \lambda_{1,2} = 2 \pm i;$$

Сипаттаушы теңдеу түбірлері комплекстік сандар, оның нақты бөлігі оң таңбалы болғандықтан қозғалыс ($x = y = 0$ шешімі)-орнықсыз фокус.

2)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= +x - 4y; \\ \frac{dy}{dt} &= x - y; \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \ \lambda_{12} = \pm\sqrt{3}i$$ - орнықты центр.

3) a және b-ның мәндеріне байланысты орнықтылыққа зерттеп, тыныштық қалпының ($x = y = 0$) қандай болатының көрсетіңдер?

$$\frac{dx}{dt} = y;$$
$$\frac{dy}{dt} = -a^2 x - 2by;$$

Нүктенің сипаттаушы теңдеуі

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & -2b-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{matrix} \lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0 \\ \lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}; \end{matrix}$$

1^0. Егер $b = 0$ болса, онда $\lambda_{1,2} = \pm ai$;

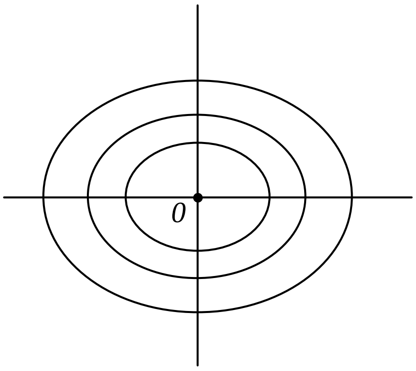
Матрицаның өзіндік саны немесе сипаттаушы теңдеудің түбірі таза жорамал сан болғандықтан, тыныштық қалпы ($x = y = 0$ нольдік шешімі) орнықты центр.

2^0. $b^2 - a^2 < 0, b > 0$-орнықты фокус.

3^0. $b^2 - a^2 \geq 0, b > 0$-орнықты түйін.

4^0. $b^2 - a^2 < 0, b < 0$-орнықсыз фокус.

5^0. $b^2 - a^2 \geq 0, b < 0$-орнықсыз түйін.



9-сызба

4) 2) – мысалда берілген жүйе қозғалысының орнықты центр болатынын көрсеткен едік, енді центрді (бас нүктені) қоршап тұрған қисықтың түрін анықтайық. (9-сызба)

$\frac{dx}{dy} = \frac{x - 4y}{x - y}$ қатынасын алайық, немесе $(x - y)dx - (x - 4y)dy = 0$.

Бұл $\frac{\partial (x - y)}{\partial y} = \frac{\partial [-(x - 4y)]}{\partial x} = -1$ болғандықтан толық дифференциалды теңдеу.

$$F(x, y) = \int (x - y)dx + \overbrace{\varphi(y)}^{C} = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'(y); -x + \varphi'(y) = -x + 4y \Rightarrow \varphi(y) = 2y^2;$$

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + 2y^2 = C_1; x^2 - 2xy + 4y^2 = 2C_1 = C;$$

$(x - y)^2 + 3y^2 = \left(\sqrt{C}\right)^2$ - эллипстер тобы.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.