12 дәріс

Дәріс тақырыбы: **Тұрақты коэффициентті біртекті сызықты жүйелер**

Жоспар

1. n - ретті біртекті емес теңдеудің оң жағы бойынша дербес шешімі және шешу әдістері. Практикада қолдану схемасы.
2. Сызықтық жүйелер. Нормаль жүйелер. Тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық жүйелердің жалпы шешімі Эйлер әдісін қолданып табу
3. Белгісізді шығару және Эйлер әдістерін қолданып жүйені шешу жолдары.

1. n - ретті біртекті емес теңдеулер жүйесінің оң жағы бойынша дербес шешімі.

Жүйелердің шешуін былайша табуға болады:

Жүйені координаттар түрінде жазып, белгісіздерді біртіндеп шығарып тастай отыра, тиісті алгебралық түрлендірулер (егер ол мүмкін болса) бойынша координаттардың біріне сәйкес жүйені n-ретті тұрақты коэффициентті бір біртекті сызықтық теңдеуге келтіруге болады. Сәйкес координаттардың көрінісін тауып, оларды шешеміз. Соңында табылған координаттардың басқаларымен байланысын қарастырып, оларды да табуға болады.

Матрицалық әдіс (Эйлер әдісін жалпылау)

$A - const$ болған жағдайда 11 дәрісдағы ($6^{/}$) шешуін

$$z = \bar{e}e^{\lambda x} \tag{1}$$

түрінде іздейміз, мұнда λ кейбір сандар, $\bar{e}$-нольден өзгеше вектор. (1) - ді ($6^{/}$)-ке қойсақ,

$$\begin{gathered} \lambda\bar{e}e^{\lambda x} \equiv A\bar{e}e^{\lambda x} \\ A\bar{e} = \lambda\bar{e} \end{gathered} \tag{2}$$

шығады. Мұнда $\bar{e} \neq 0$ вектор және (2)-ді қанағаттандыратын λ саны A матрицасының меншікті мәні және меншікті векторы деп аталады, ал λ саны төмендегі теңдеудің түбірі

$$\left|A - \lambda E\right| = 0 \tag{3}$$

Егер λ және $\bar{e}$ (2)-ді қанағаттандырса, онда (1) формуламен анықталатын z, ($6^{/}$) жүйенің шешуі болады. Мұнда екі жағдай кездесуі мүмкін:

а) A матрицасының меншікті сандары әр түрлі, онда бұлардың әрқайсысына өздеріне тән төмендегі шешулер сәйкес келеді:

$$\bar{\varphi}_k(x) = \bar{e}_k e^{\lambda_k x}, \forall \mathrm{k} = 1,2,... \tag{4}$$

Ескерту: Егер A заттық матрица және түбірлерінің кейбіреулері комплекстік болса, онда сызықтық теңдеулерге қолданылғандай (4)-ті $\sin x$ және $\cos x$ арқылы сәйкес заттық форма мен ауыстыруға болады.

в) түбірлері еселік болсын, онда $\lambda_k, \mathrm{k} = 1,2,...,\mathrm{m}$ түбірлерінің әрқайсысына (1) түріндегі $\varphi_1 = \bar{e}_k e^{\lambda_k x}$ шешуі сәйкес келеді де, λ_k мәніне сәйкес төмендегі ереже бойынша алынатын $S_k - 1$ тәуелсіз шешулер табылады:

$$\varphi_m^{(k)} = \left[\bar{e}_{k_1} + \bar{e}_{k_2} x + ... + \bar{e}_{k_m} x^m\right] e^{\lambda_k x}$$

мұнда e_{ij} λ_{k} мәніне сәйкес A матрицасының меншікті және қосылған векторларының толық жүйесі.

Практикада қолдану схемасы

1. Егер $A - const$, онда сипаттама теңдеуін аламыз да, оның түбірлерін табамыз, егер түбірлері әртүрлі болса, онда шешуі мына түрде болады:

$$\begin{cases} z_1 = C_{11} e^{\lambda_1 k} + ... + C_{1n} e^{\lambda_n k} \\ .... \\ z_n = C_{n1} e^{\lambda_1 k} + ... + C_{nn} e^{\lambda_n k} \end{cases} \tag{5}$$

мұнда $C_{ij} - const$

Тұрақтылар арасындағы байланыс былайша анықталады: (5)-ті ($6^/$) қойсақ, одан алынған тепе-теңдік жүйеден C_{ij} арасындағы байланыстар табылады.

2. Егер сипаттама теңдеу түбірлері еселік болып келсе, онда (5) орнына мына төмендегі жүйе болады.

$$\begin{aligned} & z_1 = \left(C_{11} + C_{12} x + ... + C_{1n} s_1 x^{s_1 - 1}\right) e^{\lambda_1 x} \\ & .... \\ & z_n = \left(C_{n1} + C_{n2} x + ... + C_{n1n} s_1 x^{s_1 - 1}\right) e^{\lambda_1 x} \end{aligned} \tag{6}$$

2. *Сызықтық жүйелер. Нормаль жүйелер. Тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық жүйелердің жалпы шешімі Эйлер әдісін қолданып табу*

$$\frac{dy_s}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} y_j \tag{7}$$

жүйені қарастырайық. Мұнда $a_{sj}\left(s, j = \overline{1,n}\right)$-тұрақты сандар, коэффициенттер. (14) жүйе матрицалық түрінде былай жазылады:

$$\frac{dY}{dx} = AY \text{ не } Y' = AY; \tag{8}$$

Мұнда $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ n-өлшемді вектор, ал $A-n\times n$ өлшемді квадрат матрица, яғни

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & ... & \mathrm{a}_{1n} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & ... & \mathrm{a}_{112n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathrm{a}_{n1} & \mathrm{a}_{n2} & ... & \mathrm{a}_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

(7) жүйенің шешімі Эйлер бойынша мына түрде ізделеді:

$$y=e^{\lambda x}a \tag{10}$$

Мұнда $\lambda-A$ матрицасының өзіндік мәні, ал $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ $\lambda_\mathrm{j}\left(j=\overline{1,n}\right)$ сандарына сәйкес осы матрицаның өзіндік векторлары.

1) Егер A матрицасының $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ өзіндік мәндері қос-қостан әртүрлі болып, ал $a_1,a_2,...,a_n$ осы матрицаның

өзіндік векторлары болса, онда (14) жүйе шешулерінің фундаменталдық жүйесі бар болады да, жалпы шешімі мына формуламен анықталады:

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}a_1+C_2e^{\lambda_2 x}a_2+...+C_ne^{\lambda_n x}a_n \tag{11}$$

Мұнда $C_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ сәйкес n шешулер тобын табамыз. Мәселен, шешуінің

1-тобы λ_1 сәйкес $y_{11}=a_{11}e^{\lambda_1 x}, y_{12}=a_{12}e^{\lambda_1 x},...,y_{1n}=a_{1n}e^{\lambda_1 x}$

2-тобы λ_2 сәйкес $y_{21}=a_{21}e^{\lambda_2 x}, y_{22}=a_{22}e^{\lambda_2 x},...,y_{2n}=a_{2n}e^{\lambda_2 x}$

....

n-тобы λ_n сәйкес $y_{n1}=a_{n1}e^{\lambda_n x}, y_{12}=a_{n2}e^{\lambda_n x},...,y_{nn}=a_{nn}e^{\lambda_n x}$

Матрицаның өзіндік векторларын табу үшін

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{12}$$

сипаттаушы тендеуінен λ_i түбірлерін тауып, λ орнына кезекпен λ_i мәндері қойылған жүйеден $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ өзіндік векторларын табамыз. Мәселен

$$\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)a_1+a_{12}a_2+...+a_{1n}a_n=0 \\ a_{21}a_1+(a_{22}-\lambda)a_2+...+a_{2n}a_n=0 \\ ------------------ \\ a_{n1}a_1+a_{n2}a_2+...+(a_{nn}-\lambda)=0 \end{array} \tag{13}$$

Сонда (13) жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{array}{l} y_1=C_1a_{11}e^{\lambda_1 x}+C_2a_{21}e^{\lambda_2 x}+...+C_na_{n1}e^{\lambda_n x} \\ ---------------------- \\ y_n=C_1a_{1n}e^{\lambda_1 x}+C_2a_{2n}e^{\lambda_2 x}+...+C_na_{nn}e^{\lambda_n x} \end{array} \tag{14}$$

1-мысал:

$$\frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 2y_2$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -4y_1 - y_2$$

Жүйенің дербес шешулері $y_1 = a_1 e^{\lambda_1 x}; y_2 = a_2 e^{\lambda_2 x}$. Осыны тендеуге қойып, меншікті векторларды табу үшін алгебралық жүйе аламыз

$$(5-\lambda)a_1 + 2a_2 = 0$$
$$-4a_1 + (-1-\lambda)a_2 = 0$$

Матрицаның меншікті мәндері

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

теңдеуінен табылады. Олар $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3;$ Шешімдер тобы:

$\lambda_1 = 1$ сәйкес

$$4a_1 + 2a_2 = 0$$
$$-4a_1 - 2a_2 = 0$$
$$a_2 = -2a_1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -2$$

$y_{11} = e^x; y_{12} = -2e^x;$

$\lambda_1 = 3$ сәйкес

$$2a_1 + 2a_2 = 0$$
$$-4a_1 - 4a_2 = 0$$
$$a_1 = -a_1$$
$$a_1 = 1, a_2 = -1$$
$$y_{21} = e^{3x}; y_{22} = -e^{3x};$$

Алынған дербес шешулердің жүйе шешуінің фундаметалдық жүйесі болатынын анықтау қажет, ол орындалу үшін $W(x) \neq 0$ болуы керек.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & -2e^x \\ e^{3x} & -e^{3x} \end{vmatrix} = -e^{4x} + 2e^{4x} = e^{4x} \neq 0$$

Демек жалпы шешімі

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$
$$y_2 = -2C_1 e^x - C_2 e^{3x};$$

2) Егер λ өзіндік мәні k еселік болып $m(m < k)$ сызықтық тәуелсіз өзіндік векторлары болса, онда λ - ға сәйкес шешімді $(k-m)$ дәрежелі векторлық көпмүшеліктің $e^{\lambda x}$ - ке көбейтіндісін алу керек:

$$y = \left(a_1 + a_2 x + \ldots + a_{K-m} x^{K-m}\right) e^{\lambda x}$$

Мысалы:

$$\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2;$$

Сипаттаушы теңдеудің түбірлерін табайық

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;\ \lambda_1 = \lambda_2 = 2;$$

Берілген жүйенің шешімін

$$y_1 = a_1 e^{2x};\ y_2 = a_2 e^{2x}$$

түрінде іздейміз, бұл шешулер сызықты тәуелсіз шешулер бола алмайды, сондықтан басқа бір шешулер іздеу керек.

$$(3-\lambda)a_1 + a_2 = 0$$

$$-1 \cdot a_1 + (1-\lambda)a_2 = 0$$

λ_1 - ге сәйкес $a_1 + a_2 = 0$ бұдан $a_1 = 1, a_2 = -1$

$y_1 = e^{2x};\ y_2 = -e^{2x};$ осы шешумен сызықты тәуелсіз болатын шешім , сипаттауыш теңдеу түбірі еселік болғандықтан

$y_2 = (a_1 + a_2 x)e^{2x};\ y_2 = (a_3 + a_4 x)e^{2x}$ түрінде ізделеді. Осы екінші шешімдерді берілген теңдеуге қойсақ,

$$a_2 + 2(a_1 + a_2 x) = 3(a_1 + a_2 x) + a_3 + a_4 x;$$

$$a_4 + 2(a_3 + a_4 x) = -a_1 - a_2 x + a_3 + a_4 x;$$

Бұл теңдеулерден

$$a_1 - a_4 + a_3 = 0 \qquad a_2 + a_4 = 0$$

Осыдан

$a_1 = 1, a_3 = -1; a_2 = a_4 = 0$ және $a_1 = 1; a_3 = 0; a_2 = 1; a_4 = 1;$ Сондықтан

$y_1 = e^{2x}; y_2 = -e^{2x};$ және $y_1 = (1+x)e^{2x}, y_2 = -xe^{2x};$ екі сызықты тәуелсіз шешімдер аламыз.

Демек берілген жүйенің жалпы шешімі

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2(1+x)e^{2x}$$

$$y_2 = -C_1 e^{2x} - C_2 x e^{2x};$$

3) Егер A матрицасының меншікті сандары арасында комплекстік сандар болса, онда A матрицасы нақты болған жағдайда, жүйенің комплекстік шешімінен $\lambda = \alpha \pm \beta i (\beta \neq 0)$ санына сәйкес екі сызықты тәуелсіз нақты шешім бөлініп алынады.

Мысалы:

$$\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 2y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 - y_2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0;\ \lambda_{1,2} = 2 \pm i;$$

$\lambda_1 = 2 - i$ түбірлеріне сәйкес комплекстік түрдегі шешімі $y_1 = a_1 e^{\lambda_1 x};\ y_2 = a_2 e^{\lambda_1 x};$ мұнда a_1, a_2-векторлар да комплекстік сандар. a_1, a_2 сандарын $(3-\lambda)a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow (1+i)a_1 + 2a_2 = 0$
теңдеуінен табамыз, олар $a_1 = 1 - i;\ a_2 = -1;$
Сондықтан

$$y_1 = e^{2x}[(\cos x - \sin x) - i(\cos x + \sin x)] \qquad y_{21} = -e^{2x}\cos x;$$

$$y_2 = e^{2x}(\cos x - i \sin x) \qquad y_{21} = -e^{2x}\cos x; \qquad y_{22} = -e^{2x}\sin x;$$

$$y_{22} = e^{2x}\sin x;$$

Сонымен жүйенің екі заттық шешімі табылды. Жалпы шешім:

$$y_1 = e^{2x}[(C_1 - C_2)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x]$$

$$y_2 = -e^{2x}(C_1 \cos x - C_2 \sin x);$$

3. *Белгісізді шығару және Эйлер әдістерін қолданып жүйені шешу жолдары.*

I. *Белгісізді шығару әдісі:*

Бұл әдіспен теңдеулер жүйесін бір белгісізі бар жоғарғы ретті теңдеуге келтіріп шығаруңа болады. Әдіс қиын емес теңдеулер жүйесін шығаруға қолайлы.

1. Мысал. Жүйенің шешімін табу керек:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = x + 1. \end{cases}$$

Шешуі: Жүйенің бірінші теңдеуінен

$$y = \dot{x} - 1, \qquad (*)$$

осыдан туынды аламыз $\dot{y} = \ddot{x}$, жүйенің екінші теңдеуіне қойып, $\ddot{x} = x + 1$ тұрақты коэффициентті екінші ретті теңдеу аламыз. Біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Біртекті теңдеудің шешімі $x_{б.т.}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Дербес шешімін іздейміз $f(t) = 1,\ \gamma = 0,\ s = 0$, онда $x_{д.т.}(t) = A,\quad \ddot{x}_{д.т.}(t) = 0 \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1.$

Сонымен $x_{д.т.}(t) = -1.$

Жалпы шешімі $x(t) = x_{б.т.}(t) + x_{д.т.}(t) \Rightarrow x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1$. Осыдан $\dot{x} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$, оны (*)-ға қойып, $y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1$ аламыз.

Жауабы: $x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - 1,\ y(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - 1.$

II. *Эйлер әдісі.*

(1) жүйені векторлық түрде жазамыз:

$$\dot{x} = Ax, \qquad (2)$$

мұнда $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$

(2) жүйенің шешімін

$$x = e^{\lambda t} v$$

түрінде іздейміз, мұнда λ - А матрицасының өзіндік мәні,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

теңдеуінен $v = (v_1, \dots, v_n)$ - А матрицасының өзіндік векторын λ-ға сәйкес табамыз.

Дербес жағдайларды қарастырамыз:

1) Егер λ_i - әртүрлі нақты сандар болса, v_i - сәйкес өзіндік векторлар, онда шешімді

$$x = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n v_n e^{\lambda_n t}$$

түрінде жазамыз.

2) Егер λ_i - еселі , k- еселі түбірлер болса,

а) $v_1, \dots, v_k$ сонша өзіндік векторлар болады, онда шешімді

$$x = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_k v_k e^{\lambda_k t}$$

түрінде жазады.

б) m (m<k) сызықты тәуелсіз өзіндік вектор, онда шешімді

$$\begin{cases} x_1 = (a + bt + \dots + ct^{k-m}) e^{\lambda t} \\ \dots \\ x_n = (d + ft + \dots + gt^{k-m}) e^{\lambda t} \end{cases}$$

берілген жүйеге қойып, тұрақтыларды табамыз.

3) Егер λ_i - комплекстік санда, әрбір λ_i -ға сәйкес шешім $C_i v_i e^{(\alpha + \beta i) t}$, мұнда $e^{(\alpha + \beta i) t} = e^{\alpha e} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$ - Эйлер теңдеуі. Мысал қарастырайық.

2. Мысал. Жүйенің шешімін табыңыздар

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Шешуі: 1) Сипаттамалық теңдеуін құрамыз:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

бұдан

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3.$$

2) Өзіндік векторларды анықтаймыз:

$\lambda = 3$ болғанда, өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер

$$\begin{cases} -4\alpha + 8\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases},$$

түрінде болады. Бұдан $\alpha = 2\beta$, оның шешімінің біреуі (2;1) – өзіндік вектор, осыдан $\begin{cases} x_1 = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} = 2C_1 e^{3t} \\ y_1 = C_1 e^{3t}. \end{cases}$

$\lambda = -3$ болғанда өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер

$$\begin{cases} 2\alpha + 8\beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

түрінде болады. Бұдан $\alpha = -4\beta$, оның бір шешімі (-4;1) – өзіндік вектор, осыдан $\begin{cases} x_2 = -4C_2 e^{-3t} \\ y_2 = C_2 e^{-3t}. \end{cases}$

3) Жүйенің жалпы шешімі:

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t} \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

3. Мысал. Жүйенің шешімін табыңыз:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Шешімі: 1) Сипаттамалық теңдеуден өзіндік мәндерді табамыз:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

осыдан

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i,$$

үшінші жағдай.

2) Өзіндік векторларды анықтаймыз.

$\lambda = 1 + 3i$ болғанда, өзіндік векторларды анықтайтын теңдеулер

$$\begin{cases} -3i\alpha - 3\beta = 0 \\ 3\alpha - 3i\beta = 0 \end{cases},$$

түрінде болады, осыдан $\alpha = i\,\beta$, оның бір шешімі(1;-i) – өзіндік вектор.
Жүйенің фундаментальды шешімі

$$x = e^{(1+3i)t} = e^{t}(\cos 3t + i\sin 3t)$$

$$y = -i\,e^{(1+3i)t} = -i\,e^{t}(\cos 3t + i\sin 3t) = -e^{t}(i\cos 3t - \sin 3t),$$

және

$$x_1 = \operatorname{Re} x = e^{t}\cos 3t \qquad x_2 = \operatorname{Im} x = e^{t}\sin 3t$$

және

$$y_1 = \operatorname{Re} y = e^{t}\sin 3t \qquad y_2 = \operatorname{Im} y = -e^{t}\cos 3t,$$

онда

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1e^{t}\cos 3t + C_2e^{t}\sin 3t \\ y = C_1e^{t}\sin 3t - C_2e^{t}\cos 3t \end{cases}$$

$\lambda = 1 - 3i$ - түйіндес санға сәйкес шешім $\alpha + \beta i$ түбірімен сәйкес келеді.

Жауабы: $\begin{cases} x = C_1e^{t}\cos 3t + C_2e^{t}\sin 3t \\ y = C_1e^{t}\sin 3t - C_2e^{t}\cos 3t. \end{cases}$

4. Мысал. Жүйенің шешімін табу керек

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases} \qquad (**)$$

Шешімі. 1) Сипаттамалық теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (***)$$

осыдан

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3,\ \ k = 2$$

еселі түбірлер.

2) Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар санын табамыз:
$\lambda = 3$ болғанда, (***) теңдеуден

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицасын аламыз, оның реті n=2, ранг r=1.
Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар саны m = n - r =1.
$\lambda = 3$ түбірі еселігі $k = 2$, яғни $k > m$, онда шешімді $k - m = 1$ ретті көпмүшеліктің $e^{\lambda t}$ көбейтіндісі ретінде қарастырамыз, яғни

$$\begin{cases} x = (a + bt)e^{3t} \\ y = (c + dt)e^{3t}, \end{cases}$$

және

$$\dot{x} = be^{3t} + 3(a+bt)e^{3t}$$
$$\dot{y} = de^{3t} + 3(c+dt)e^{3t};$$

(**) жүйеге қойып,

$$\begin{cases} b + 3a + 3bt = 2(a+bt) + c + dt \\ d + 3c + 3dt = 4(c+dt) - a - bt \end{cases}$$

сәйкес коэффициенттерін теңестіре отырып,
бірінші теңдеуден

$$t\ :\ 3b = 2b + d$$
$$t^0:\ b + 3a = 2a + c,$$

екінші теңдеуден

$$t\ :\ 3d = 4d - b$$
$$t^0:\ d + 3c = 4c - a$$

аламыз. Осыдан
$\begin{matrix} b = d \\ b + a = c \end{matrix}$, $b = C_2,\ \ a = C_1$ белгілесек, онда $d = C_2,\ \ c = C_1 + C_2$.

3) Берілген жүйенің жалпы шешімі:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$$
$$y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}.$$

Нормаль түріне келтірілмеген

$$\begin{cases} a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \ldots + a_{1n} + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0, \\ a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n} + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \ldots + b_{2n}y = 0, \end{cases}$$

жүйесін шешу үшін келесі сипаттамалық теңдеуді құрамыз

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

Теңдеудің түбірлерін табамыз. Шешімді алдыңғы есептей жазамыз.

5. Мысал. Жүйенің шешімін табу керек:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

Шешуі. Сипаттамалық теңдеуін құрамыз

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 2 & 3 \\ -1 & \lambda^2 + 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Бұдан $(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 2) + 3 \Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm 1,\ \lambda_{3,4} = \pm i$.

$\lambda = \pm 1$ болғанда, өзіндік векторларды табамыз

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3\beta \Rightarrow (3,1).$$

Шешім: $\begin{cases} x_1 = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} \\ y_1 = C_1e^t + C_2e^{-t}. \end{cases}$

$\lambda_{3,4} = \pm i$ болғанда, өзіндік векторларды табамыз

$$\begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow (1,1).$$

Шешім: $\begin{cases} x_2 = C_3\cos t + C_4\sin t \\ y_2 = C_3\cos t + C_4\sin t. \end{cases}$

Жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{cases} x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t. \end{cases}$$

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-106.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-104.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.