11 дәріс

***Дәріс тақырыбы:* Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жөнінде түсінік.**

Жоспар

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жөнінде түсінік.
2. Сызықтық жүйелер. Жалпы мәселелер.
3. Сызықтық жүйелер түрлері. Оларды шешу әдістері және негізгі қасиеттері.
4. Сызықты тәуелділік және Вронский анықтауышы.
5. Шешудің фундаменталдық жүйелері және олардың бар болуы.
6. Шешулерінің фундаменталдық жүйесі бойынша теңдеудің өзін құру.
7. Остроградский - Лиувилль формуласы.

1. *Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жөнінде түсінік*

Толық хабарламасы бар төмендегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық

$$\begin{aligned} &F_1\left(x, y_1,\dots,y_n, y_1',\dots,y_n', y_1^{(k_1)},\dots,y_n^{(k_n)}\right)=0 \\ &F_2\left(x, y_1,\dots,y_n, y_1',\dots,y_n', y_1^{(k_1)},\dots,y_n^{(k_n)}\right)=0 \\ &-------------------- \\ &F_n\left(x, y_1,\dots,y_n, y_1',\dots,y_n', y_1^{(k_1)},\dots,y_n^{(k_n)}\right)=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

мұнда $x \in J$, ал

$$\begin{aligned} &y_1 = y_1(x) \\ &y_2 = y_2(x) \\ &------ \\ &y_n = y_n(x) \end{aligned}$$

J да ізделінетін үздіксіз дифференциалданатын функциялар, $F_1,\dots,F_n$ - белгісіз функциялар,

$k_1 \geq 1 - y_1$ - дің ең жоғарғы туындысының реті

$k_n \geq 1 - y_n$ - нің ең жоғарғы туындысының реті

$N = k_1 + \dots + k_n$ - жиынтық реті.

Негізінде бұл жүйе олардың жалпы түрі. Саны N дана жаңа белгісіз фүнкцияларды енгізе отырып, біз алғашқы жүйені әрқашанда толық хабарламалы теңдеулер жүйесіне келтіруге болатынын көрсеткен едік.

Егер (1) жүйенің теңдеуі ең үлкен туындысы арқылы анықталса:

$$\begin{aligned} &y_1^{(k_n)} = G_1\left(x, y_1,\dots,y_n,\dots,y_1^{(k_1-1)},\dots,y_n^{(k_n-1)}\right) \\ &-------------------- \\ &y_n^{(k_n)} = G_n\left(x, y_1,\dots,y_n,\dots,y_n^{(k_1-1)},\dots,y_n^{(k_n-1)}\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

болады. Мұны жүйенің канорикалық түрі деп атайды.

(1) жүйені 1 – ретті теңдеулер жүйесіне келтіруге болады, бұдан мынандай қорытынды шығарамыз: Жаңа айнымалыларды еңгізе отырып, (2) жүйені саны N теңдеуден тұратын нормаль түрдегі жүйеге келтіруге болады:

$$\begin{aligned} z_1' &= f_1(x, z_1, z_2, ..., z_N) \\ &\text{.........................} \\ z_N' &= f_N(x, z_1, z_2, ..., z_N) \end{aligned} \qquad (3)$$

Сонымен, кез келген (2) жай диференциялдық теңдеулер жүйесін (3) түріне келтіруге болады екен. (3) те кейбір түрлендірулерді жасап көрейік:

$$\begin{cases} z_i = y_i \\ N = n \end{cases}$$

Онда (3) мына түрде жазылар еді:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ &------------ \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{aligned} \qquad (4)$$

(4) үшін $D \subset R^{n+1}$ облысында бар болу және жалғыздық жөніндегі теоременың шарттары орындалатын болсын деп жориық (Пикар теоремасын қараңыз).

2. Сызықтық жүйелер. Жалпы мәселелер

Анықтама. Мына төмендегі (5) жүйені біртекті емес сызықтық жүйе деп атайды:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + g_1(x) \\ &------------------------ \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + g_n(x) \end{aligned} \qquad (5)$$

Егер (5) жүйеде барлық $g_k(x) \equiv 0$, онда ол жүйе біртекті сызықтық жүйе деп аталады.

$$\begin{aligned} z_1' &= a_{11}(x)z_1 + ... + a_{1n}(x)z_n \\ &------------------ \\ z_n' &= a_{n1}(x)z_1 + ... + a_{nn}(x)z_n \end{aligned} \qquad (6)$$

Егер

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \bar{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_1(x) \end{pmatrix}, \bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Векторлық белгілеуді еңгізсек және

$$A = A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ \text{.................................} \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

матрица-функцияны алсақ, (5) және (6) жүйелерді мына төмендегі ықшамды түрде жазуға болар еді, мәселен

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{g}(x) \tag{5'}$$

$$\bar{z}' = A(x)\bar{z} \tag{6'}$$

Сонымен, негізгі мәселе (5) және (6) сызықтық жүйелерге біртекті және біртекті емес сызықтық теңдеулерге қолданылатын қасиеттері мен тұжырымдарды қолдануға болатынын көрсету.(тұрақты коэффициенттіжүйелерге де қолданылады, яғни $A(x) = \cos t$)

Ескерту: Мынаны еске сақтау керек, егер реті қанша жоғары болса да, дифференциалдық теңдеулер үшін шешуі белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын $\varphi(x)$ функциясы болса, ал жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шешу функциялар жиынтығы болады, мәселен

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

(6) жүйенің негізгі қасиеттеріне тоқталайық.

3. *Сызықтық жүйелер түрлері. Оларды шешу әдістері және негізгі қасиеттері*

1^0. Тәуелсіз айнымалы x және ізделінетін функцияларды ауыстырғаннан (6) жүйенің сызықтық қалпы өзгермейді (инварианттық қасиеті). Біртекті теңдеулерге қолданылған әдіс жарамды.

2^0. (6) жүйе шешулерінің сызықтық комбинациясы да оның шешуі бола алады.

Егер (6) жүйенің кез келген k шешулер жүйесі

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{1n}(x) \end{pmatrix}, \dots, \bar{\varphi}_{kn}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{k1}(x) \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{kn}(x) \end{pmatrix}$$

болса,онда $\forall c_1, c_2, \dots c_k$ тұрақтылар арқылы комбинацияланған

$\bar{\phi}(x) = c_1\bar{\varphi}_1 + c_2\bar{\varphi}_2 + \dots + c_k\bar{\varphi}_k$ функциясы да оның шешуі болады.

Дәлелдеу: 1) $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n$ (6) жүенің шешуі болғандықтан, оның әрқайсысы J –да (6) жүйені n тепе-теңдікке айналдырады. Осы теңдіктерді $c_1, c_2, \dots c_k$ –ға көбейтіп, өзара қоссақ 2^0 қасиеттің тұжырымдары шығады.

$$\bar{\varphi}_1'(x) \text{ шешуі } \Rightarrow \varphi_1'(x) \equiv A(x)\bar{\varphi}_1'(x)$$

....

$$\bar{\varphi}_k'(x) \text{ шешуі } \Rightarrow \varphi_k'(x) \equiv A(x)\bar{\varphi}_k(x)$$

Осы векторлық тепе-теңдіктерді $c_1, c_2, ...c_k$-ға көбейтіп және туынды қасиеттерін пайдалансақ, мынау шығады:

$$[c_1\overline{\varphi}_1 + ... + c_k\overline{\varphi}_k]' \equiv c_1A(x)\overline{\varphi}_1(x) + ... + c_kA(x)\overline{\varphi}_k(x) \equiv$$
$$\equiv Ac_1\overline{\varphi}_1 + ... + Ac_k\overline{\varphi}_k \equiv A(x)[c_1\overline{\varphi}_1(x) + ... + c_k\overline{\varphi}_k(x)]$$

Бұл вектор-функция сызықтық комбинация болғандықтан (6) жүйені J – да қанағаттандырады, демек ол оның шешуі. Дәлелдеу керегі де осы еді.

4. *Сызықты тәуелділік және Вронский анықтауышы*

Анықтама. Айталық, J-да $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$вектор-функциялар берілген дейік. Осы вектор-функциялар J –да сызықты тәуелсіз деп аталады, егер олар үшін осы жиында

$$c_1\overline{\varphi}_1(x) + ... + c_k\overline{\varphi}_k(x) \equiv 0 \tag{7}$$

орындалмайтын болса, мұнда $c_1, c_2, ...c_k$ біруақытта барлығы бірдей нольге тең емес тұрақтылар. Керісінше жағдайда $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_k(x)$ функциялары J –да сызықты тәуелді деп аталады.

Анықтама. Егер $k = n$ алсақ, J-де үздіксіз туындылары бар n функциялар болар еді. Осы жағдайда

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

$n \times n$ өлшемді анықтауыш **Вронский анықтауышы** деп аталады, мұнда 1-бағана $\varphi_1(x)$ шешуінің координаталары, 2-бағана $\varphi_2(x)$ координаталары т.с.с.

Теорема 1. $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ вектор-функциялар J-да сызықты тәуелді болса, онда $W(x) \equiv 0$

Теорема 2. Айталық, $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ вектор-функциялар үздіксіз коэффициенттері бар (6) жүйенің кез келген шешулері болсын дейік. Онда $\forall x \in J; \mathrm{W(x)} \neq 0$ болса, онда бұл функциялар J –да сызықты тәуелсіз, ал $\exists x_0 \in J : W(x_0) = 0$ болғанда, $W(x) \equiv 0$ болса, олар J –да сызықты тәуелді болады.

Дәлелдеу: n-ретті біртекті сызықты теңдеудегі дәлелдеуге қараңыз. Ал біз, егер $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ шешулерінің бар болуы мен жалғыздық шартын қанағаттандырса және $\exists x_0 \in J : W(x_0) = 0$ болса, онда $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ шешулері сызықты тәуелді, 1-теореманың шартына сәйкес $W(x) \equiv 0;$Жаңадан шешу құрайық:

$$\overline{\varphi}(x) = c_1\overline{\varphi}_1(x) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x), \ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{J} \tag{9}$$

Теореманы дәлелдеу идеясы:Біздің дәлелдейтініміз, егер $W(x_0) = 0$ болса, онда барлығы бірдей нольге емес $\exists c_1, c_2, ...c_k$ тұрақтылары үшін x_0нүктесінде $\overline{\phi}(x)$–тің нольдік бастапқы шарттары болуы қажет, яғни $\phi(x_0) = 0$. Онда жалғыздық теоремасы бойынша $\phi(x) \equiv 0$ болады. Осыдан және (9)-дан

барлық $c_i = 0$ болмаған да $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ негізгі функциялар сызықты тәуелді болады.
Сонымен, бізге $\phi(x_0) = 0$ болатыны қажет. Егер (9)-ды еске алсақ, мына төмендегі $c_1, c_2,...c_n$ байланысты алгебралық сызықты біртекті жүйе пайда болады.

$$\begin{array}{cccc} c_1\varphi_{11}(x_0) & +...+ & c_n\varphi_{n1}(x_0) & = 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ c_1\varphi_{n1}(x_0) & +...+ & c_n\varphi_{nn}(x_0) & = 0 \end{array} \qquad (10)$$

шарт бойынша мұның негізгі анықтауышы $W(x) = 0$ болады.
Онда сызықтық алгебра теоремасы бойынша (10) біртекті жүйенің айқын емес шешуі бар болады, яғни (10) қанағаттандыратын барлығы бірдей нольге тең емес $\exists c_1, c_2,...c_n$ сондықтан x_0 нүктесінде нольдік

$$\overline{\phi}^0(x) = c_1^0\varphi_1(x) + ... + c_n^0\varphi_n(x)$$

бастапқы шарттары бар. Онда жалғыздық теоремасы бойынша $\overline{\phi}^0(x) \equiv 0$, яғни J –да

$$c_1^0\varphi_1(x) + ... + c_n^0\varphi_n(x) \equiv 0$$

болады, ал тұрақтылардың бәрі бірдей нольге тең емес, сол себептен негізгі шешу сызықты тәуелді. Ендеше 1-теорема бойынша $W(x) \equiv 0$. Дәлелдеу керегі де осы болатын.

5. Шешудің фундаменталдық жүйелері және олардың бар болуы

Анықтама. Кез келген $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ (6) жүйенің n сызықты тәуелсіз шешулері фундаменталдық жүйе деп аталады. Осы шешулердің $z(x) = (\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x))$ матрицалы шешулердің фунтаменталдық матрицасы болады.

J -да $\det z(x) = W(x) \neq 0$ болғандықтан $z(x)$-тің өзгеше емес матрица болатыны қажетті және жеткілікті.

Есеп: $z(x)$-тің өзгеше болмауы әдетте оған кері матрица бар болуын қамтамасыз етеді.

1) $\dfrac{d}{dx} z^{-1}(x) = -z^{-1}(x) \cdot z(x) z^{-1}(x) = -z^{-1}(x) A(x)$

болатынын дәлелдеу керек.

Нұсқау: $z^{-1}(x) z'(x) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ тепе-теңдігін дифференциялдау керек, қосымша матрицалық тепе-теңдікті

$$0 = E' = \left(z^{-1}(x)\right)' z(x) + z^{-1}(x) z'(x)$$

скалярлық тепе-теңдікті дифференциялдау заңы арқылы жүргізуге болатынын еске алу қажет.
2) $z'(x) = A(x) z(x)$ $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{J}$;

дәлелдеу керек, яғни шешулердің фундаменталдық матрицасы ($6^/$)-ті қанағаттандыратынын дәлелдеу қажет.

Теорема: ($6^/$) жүйесі үшін шешулерінің шексіз көп фундаменталдық жүйесі бар болады.

Дәлелдеу: Сызықтық теңдеулерде қолданылған ұқсас дәлелдеулерге қараңыз.Кез келген анықтауыш.

$$d = \begin{vmatrix} d_{11} & .... & d_{1n} \\ ... & .... & ... \\ d_{n1} & .... & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (11)$$

$\forall x_0 \in J$ нүктені белгілеп алып, $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ шешулерінің фундаметалдық жүйесін құрайық. Ол үшін шешудің бар болу және жалғыздығы жөніндегі теореманы былайша қолданамыз. Айталық $\overline{\varphi}_1(x)$ ($6^/$) тің шешуі болсын:

$$\overline{\varphi}_1(x_0) = \begin{pmatrix} d_{11} \\ ... \\ ... \\ d_{n1} \end{pmatrix},...,\overline{\varphi}_n(x_0) = \begin{pmatrix} d_{1n} \\ ... \\ ... \\ d_{nn} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

(шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша). Онда анықтама бойынша шығады, $W(x_0) = d \neq 0$ сондықтан 3 қасиеті бойынша құрылған шешулер $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$-сызықты тәуелсіз болады да, келтірілген анықтама бойынша шешулерінің фунтаменталдық жүйесін құрады.

Қорытынды: Сонымен, әрбір $d \neq 0$ ге бір ғана $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ фундаменталдық жүйе сәйкес келеді, керісінше де айқын:әрбір фундаменталдық жүйеге белгілі бір d анықтауышы сәйкес келеді.Осындай d-лар шексіз көп болатыны белгілі,ал бұл айтылған қасиетінің дұрыстығын дәлелдейді.

5^0. Жалпы шешуінің формуласы.

Теорема: Егер $\overline{\varphi}_1(x),...,\overline{\varphi}_n(x)$ (6) жүйенің кез келген фундаментальдық жүйесі болса, онда (6) жүйенің жалпы шешуі

$$z = c_1\overline{\varphi}_1(x) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x) \qquad (13)$$

формуламен беріледі, мұнда $c_1, c_2,...c_n$ кез келген тұрақтылар.

Дәлелдеу: а) алдымен кез келген $c_1, c_2,...c_n$ тұрақтылар болғанда (13) ($6^/$) жүйенің шешуі болатынын көрсету керек, ал бұл 2 қасиеттен шығады.

б) алдын ала берілген кез келген $c^0{}_1, c^0{}_2,...c^0{}_n$ тұрақтылары үшін

$$\overline{\phi}(x) \equiv c_1^0\overline{\varphi}_1(x) + c_2^0\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n^0\overline{\varphi}_n(x) \qquad (14)$$

шешуі бар болады. (14)-тің бар болуын Пикар теоремасы бойынша дәлелдейміз.

Кез - келген $c_1, c_2,...c_n$ тұрақтылар мен $\forall x_0 \in J$ үшін

$$\overline{\phi}(x_0) = c_1\overline{\varphi}_1(x_0) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x_0) \qquad (15)$$

Шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша әрбір $\bar{\phi}(x)$ сияқты шешу өзінің бастапқы мәндері бойынша бірмәнді анықталады.
Егер (15)-тің шешуін көрсете алсақ, онда Пикар теормасына сәйкес (14) шығар еді.
(15) жүйе $W(x_0) \neq 0$ анықтауышы бар $c_1, c_2, \ldots c_n$ шамаларына байланысты сызықтық біртекті емес жүйе, сондықтан да Крамер ережесі бойынша (15)-тің жалғыз ғана шешуі бар болады. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Есеп: үздіксіз матрицалы ($6^{/}$) жүйе үшін кез келген $n+k$ шешулердің J-да сызықты тәуелді болғандығын дәлелдеңіз.

6. Шешулерінің фундаменталдық жүйесі бойынша теңдеудің өзін құру.

Теорема: Айталық J да үздіксіз коэффициенттер матрицасы бар ($6^{/}$) жүйенің шешуінің кейбір фундаменталдық жүйесі берілген болсын. Онда ($6^{/}$) жүйедегі $A(x)$ матрицасы бір мәнді анықталады, атап айтқанда:
$A(x) = z'(x)z^{-1}(x),\ x \in J$ мұнда $z(x) - \bar{\varphi}_1(x), \ldots, \bar{\varphi}_n(x)$ шешуінің фундаменталдық матрицасы.

Дәлелдеу: Фундаменталдық матрицасын құрайық:

$$z(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

мұнда

$$\begin{array}{c} \varphi_{11} \ldots \varphi_{1n} - \bar{\varphi}_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n1} \ldots \varphi_{nn} - \bar{\varphi}_n(x) \end{array}$$

координаттары
Бұл жағдайда $z(x)$ өзгеше емес матрица және $\bar{z}'(x) \equiv A(x)z(x)$ теңдеуін қанағаттандырады. $z^{-1}(x)$ ке көбейтсек $\bar{z}'(x)z^{-1}(x) \equiv A(x)$ шығады.
Дәлелдеу керегіде осы еді.

7. Остроградский - Лиувилль формуласы

Айталық $\bar{\varphi}_1(x), \ldots, \bar{\varphi}_n(x)$ ($6^{/}$) жүйенің кез келген n шешуі болсын дейік. Онда $\forall x_0 \in J$ үшін

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} S_p A(\xi)d\xi} \tag{16}$$

мұнда $S_p A(x) = trA(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$

(16) формула Остроградский-Лиувилль формуласы деп аталады.

Дәлелдеу: Бір теңдеу үшін осы сияқты мәселені қараңыз. Біздің дәлелдейтініміз

$$W'(x) \equiv W(x) S_p A(x) \tag{17}$$

тепе-теңдігі,осыны интегралдап (16) ны шығарып алар едік сонымен,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}; \varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x)$$

анықтауышын қарастырамыз;

Оның туындысы

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{n1} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{n-1,1} & \cdots & \varphi'_{n-1,n} \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{n1} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Шарт бойынша $\overline{\varphi}_1(x),\ldots,\overline{\varphi}_n(x)$ ($6^{/}$) жүйенің шешуі. Енді $\overline{\varphi}_k(x)(\forall \mathrm{k} = 1,2,\ldots)$ қарастырайық.

$$\overline{\varphi}_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1k} \\ \cdots \\ \cdots \\ \varphi_{nk} \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\varphi}'_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi'_{1k} \\ \cdots \\ \cdots \\ \varphi'_{nk} \end{pmatrix} \begin{matrix} \equiv \sum\limits_{m=1}^{n} a_{1m}\varphi_{mk} \\ \equiv \sum\limits_{m=1}^{n} a_{nm}\varphi_{mk} \end{matrix} \tag{19}$$

(19) теңдік $\overline{\varphi}_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1k} \\ \cdots \\ \cdots \\ \varphi_{nk} \end{pmatrix}$ ауыстыруын (6) жүйеге қойғаннан шығады. (19) ды (18)ге қойсақ мынау шығады:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{n} a_{1m}\varphi_{m1} & \cdots & \sum\limits_{m=1}^{n} a_{1m}\varphi_{mn} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{m=1}^{n} a_{mn}\varphi_{m1} & \cdots & \sum\limits_{m=1}^{n} a_{nm}\varphi_{mn} \end{vmatrix} =$$

|анықтауыштардың қасиеті бойынша| =

$$= \sum_{m=1}^{n} a_{1m} \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{егер m}\neq 1 \text{ болса, бул}\equiv 0;} + \ldots + \sum_{m=1}^{n} a_{nm} \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mn} \end{vmatrix}}_{\text{егер } m=n \text{ болса, бул}\equiv 0} =$$

$$= a_{11}W(x) + \ldots + a_{nn}W(x) = W(x)S_p A(x);$$

Сонымен $W'(x) = W(x)S_p A(x)$ осыны интегралдап (16)-формуланы аламыз.

Дәлелдеу керегі де осы еді.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.