10 дәріс

***Дәріс тақырыбы:* Тұрақты коэффициентті *n* – ретті біртекті емес теңдеудің оң жағы бойынша дербес шешуін табу.**

Жоспар

1. Біртекті емес n–ретті теңдеудің жалпы шешімін табу әдісі.
2. Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау
3. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі. Теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі.

1. *Біртекті емес n–ретті теңдеудің жалпы шешімін табу әдісі*

Тұрақты коэффициентті n – ретті біртекті емес теңдеу және оны шешу әдістері.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (35)$$

теңдеуі берілсін.

Осындай теңдеулердің 2 класын қарастырайық:

1) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} - const$

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) = e^{\alpha x}\left(\alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0\right) \qquad (36)$$

мұнда α, m және $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$-кез келген сандар.

2) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} - const$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x\right] \qquad (37)$$

мұнда $\alpha, \beta \in R$-кез келген сандар, $P_m(x)$ және $Q_k(x)$ реттері сәйкес m және k болатын кез келген көпмүшеліктер.

<u>Теорема:</u> Айталық, (35) теңдеу коэффициенттері $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$ тұрақты сандар болсын.

<u>1^0</u>**.** Егер оның оң жағы (36) түрінде болса, онда (35) теңдеудің дербес шешуі

$$y_\partial = x^S e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x) \qquad (38)$$

түрінде болады, мұнда $\tilde{P}_m(x) - m$ ретті кейбір көпмүшелік, негізінде $P_m(x)$-тен басқа, ал

$$S = \begin{cases} 0, \text{егер } \alpha - (35) - \text{ке сәйкес біртекті т тендеун ттубір болмаса} \\ \kappa, \text{егер } \alpha - (35) - \text{ке сәйкес біртекті т тендеун ттубір болса} \end{cases}$$

<u>2^0</u> Егер теңдеудің оң жағы (37) түрінде болса, онда (35) теңдеудің дербес шешуі.

$$y_\partial = x^S e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_e(x) + Q_e x \sin\beta x\right]; \qquad (39)$$

мұнда $1 = \max(k, m), \tilde{P}_l, \tilde{Q}_l(x)$-реті l-ге тең көпмүшеліктер.

$$S = \begin{cases} 0, \textit{егер } \alpha + i\beta & \text{(8)-дің түбірі болмаса} \\ S, & \text{түбірі болған жағдайдағы оның еселігі} \end{cases}$$

Дәлелдеуін өзбеттеріңізбен жүргізіңіздер.

Нұсқау: а) (38)-ді мына түрде жазыңыз:

$y_{\partial} = e^{\alpha x} x^{S} \tilde{P}_m(x) = e^{\alpha x}\left(b_m x^{m+S} + b_{m-1}x^{m-1+S} + \ldots + b_0 x^{S}\right);$

б) Көбейтіндінің жоғарғы ретті туындысын табу үшін Лейбниц формуласын қолданамыз, берілген теңдеудің $x^m e^{\lambda x}$ шешуі болатын дәлелдемені қараңыз, y_g шешу (35)-ке қойылады да, оң жағы $f(x)$ орнына (36) жазылады;

в) $e^{\alpha x}$-ке қысқартылады, қалған тепе-теңдікте x-тің бірдей дәрежесінің коэффициенттері теңестіріледі, сөйтіп алынған жүйеден біртіндеп $\tilde{P}_m(x)$ көпмүшелігінің барлық $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ коэффициенттері анықталады.

2) Теореманың бұл бөлігі $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$ болғанда ғана дұрыс. Теорема алдыңғы жағдайға Эйлер формуласы арқылы келтіріліп дәлелденеді. Негізінде

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2};$$

$$\sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i};$$

Осыған орай (37)-ні мына түрде жазайық:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q_k(x)\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}\right] =$$

$$= e^{\alpha x}\left[\left(\frac{P_m(x)}{2} + \frac{Q_k(x)}{2i}\right)e^{i\beta x} + \left(\frac{P_m(x)}{2} - \frac{Q_k(x)}{2i}\right)e^{-i\beta x}\right] = \tag{40}$$

$$= \frac{\hat{P}_e(x)e^{(\alpha+i\beta)x}}{f_1(x)} + \frac{\hat{Q}_e(x)e^{(\alpha-i\beta)x}}{f_2(x)};$$

(40)-тағы әр бір $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары (36) сияқты. Сондықтан дербес шешуді таба аламыз, ол $y_{\partial} = y_{\partial_1} + y_{\partial_2}$ болады, мұнда

$$y_{\partial_1} = x^{S_1} e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot \tilde{\tilde{P}}_e(x); \quad y_{\partial_2} = x^{S_2} e^{(\alpha-i\beta)x} \cdot \tilde{\tilde{Q}}_e(x);$$

S_1 және S_2 теңдеудің сипаттама теңдеуінің $\alpha + i\beta$ және $\alpha - i\beta$ түбірлерінің сәйкес еселіктері.

Қарастырылып отырған жағдайда коэффициенттері нақты сандар, сондықтанда $S_1 = S_2 = S$;

Сол себептен

$$y_\partial = y_{\partial_1} + y_{\partial_2} = x^S\left[e^{\alpha x}e^{i\beta x}\tilde{\tilde{P}}_e(x) + e^{\alpha x}e^{-i\beta x}\tilde{\tilde{Q}}_e(x)\right] =$$

$$= x^S e^{\alpha x}\left[\underbrace{\left(\tilde{\tilde{P}}_e(x) + \tilde{\tilde{Q}}_e(x)\right)}_{\tilde{P}_e}\cos\beta x + i\underbrace{\left(\tilde{\tilde{P}}_e(x) - \tilde{\tilde{Q}}_e(x)\right)}_{\tilde{Q}_e}\sin\beta x\right] = \qquad (41)$$

$$= x^S e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_e(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_e(x)\sin\beta x\right]$$

<u>Ескерту:</u> Теоремада айтылған дербес шешу құру әдісі-анықталмаған коэффициенттер әдісі деп аталады.

2. Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау

Мына төмендегі теңдеулерді қарастырайық:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1)$$

$$z^{(n)} + a_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)z' + a_0(x)z = 0 \qquad (2)$$

(2) теңдеуді (1) теңдеуге сәйкес біртекті сызықтық теңдеу деп атайды. X те коэффициенттері үздіксіз деп жоримыз.

Лемма: Егер (1) теңдеудің бір дербес шешуі $y_\partial(x)$ болса, онда оның жалпы шешуі

$$y = y_\partial(x) + z(x) \qquad (3)$$

формуласымен беріледі, мұнда $z(x)$ және $y(x)$ (2) және (1) теңдеулердің сәйкес жалпы шешулері.

Дәлелдеу: Келісім бойынша $y_\partial(x)$ теңдеудің дербес шешуі болғандықтан X те мына тепе-теңдік орынды:

$$y_\partial^{(n)} + a_{n-1}^{(x)}y_\partial^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y_\partial' + a_0(x)y_\partial \equiv f(x),\ \forall x \in X \qquad (4)$$

(1)-де $\begin{cases} x \\ y \end{cases} \to \begin{cases} \qquad\qquad x \\ u = u(x);\ y = y_\partial + u; \end{cases}$

Ауыстыруын жасасақ, мынау шығады:

$$\underline{y_\partial^{(n)}} + u^{(n)} + \underline{a_{n-1}(x)y_\partial^{(n-1)}} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ \underline{a_1(x)y_\partial'} + a_1(x)u' + a_0(x)y_g + a_0(x)u \equiv \underline{f(x)}$$

Соңғы өрнекте, (4)-ке байланысты асты сызылған мүшелері өзара жойылады да, $u = u(x)$тен тұратын мүшелер қалады. Демек $u = u(x)$ біртекті теңдеудің шешуі.

Есеп: (1) теңдеудің оң жағы

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

болсын.

Егер пайда болатын әрбір теңдеудің дербес шешулері сәйкес

$$y_{\partial_1}(x), y_{\partial_2}(x), \ldots, y_{\partial_k}(x)$$

болса, (1) теңдеудің дербес шешуі

$$y_\partial(x) = y_{\partial_1}(x) + y_{\partial_2}(x) + \ldots + y_{\partial_k}(x)$$

болатынын дәлелде.

3. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі Теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі.

(1) теңдеуді қарастырып және оған сәйкес (2) теңдеу шешулерінің фундаментальдық жүйесі белгілі болсын дейік. Онда оның жалпы шешуі мына формуламен берілетіні белгілі:

$$z = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \tag{5}$$

мұнда $z_i = \varphi_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ - дербес шешімдер, ал $C_1, C_2, \ldots, C_n$ –тұрақты шамалар.

Вариациялау әдісінің негізгі идеясы мынада:
(1) теңдеудің жалпы не дербес шешуін (5) түрінде іздеуге болады, бірақ ондағы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ тұрақты шамалар емес, кейбір белгісіз x–тің функциялары; демек (1)-дің шешуін мына түрде іздейміз:

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\varphi_i(x) \tag{6}$$

(6)-ны x бойынша n рет дифференциалдайық:

$$y' = \underbrace{C_1'(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n(x)}_{\text{осыны 0-ге тен деп алайык}} + C_1(x)\varphi_1'(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n'(x);$$

$$y'' = \underbrace{C_1'(x)\varphi_1'(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n'(x)}_{\text{0-ге тен деп аламыз}} + C_1(x)\varphi_1''(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n''(x);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7}$$

$$y^{(n-1)} = \underbrace{C_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x)}_{\text{0–ге тен деп аламыз}} + C_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x);$$

$$y^{(n)} = C_1'(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)\varphi^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)\varphi^{(n)}(x);$$

(7)-ні (1)-ге қойып, $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ арқылы топтастырсақ, 0-ге тең деп алынған шамаларды еске алсақ:

$$C_1'(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

болып шығады.

Сонымен, ізделіп отырған белгісіз дифференциалданатын $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ функциялары мына төмендегі жүйені қанағаттандырады:

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x)+\ldots+C_n'(x)\varphi_n(x)=0 \\ C_1'(x)\varphi_1'(x)+\ldots+C_n'(x)\varphi_n'(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)=f(x) \end{cases} \tag{8}$$

Бұл жүйенің негізгі анықтауышы вронскиан болғандықтан, оның бір мәнді ғана шешуі болады, өйткені

$$W[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)]\neq 0$$

Сондықтан Крамер ережесі бойынша $C_i'(x)=\dfrac{W_i(x)}{W(x)}$, мұнда $W_i(x)-i$-бағанасы бос мүшелермен ауыстырылған анықтауыш, ал $W(x)$–вронскиан, (8) жүйенің негізгі анықтауышы. Бұдан

$$C_i(x)=\int\frac{W_i(x)}{W(x)}dx+C_i \tag{9}$$

Мұнда C_i–кез-келген тұрақты шама.

(9)-ды (6)-ға қойып (2) теңдеудің жалпы шешуін табамыз:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\left(\int\frac{W_i(x)}{W(x)}dx+C_i\right)\varphi_i(x) \tag{10}$$

(10)-да жақшаны ашып, оң жағын (3)-пен салыстырсақ:

$$y_g(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\int\frac{W_i(x)}{W(x)}dx \tag{11}$$

шығады. Бұл (1) теңдеудің бір дербес шешуі.

***Ескерту*:** Сонымен, тұрақтыны вариациялау әдісі мына мәселелерге келтіріледі:

1. (2) біртекті теңдеу шешуінің фундаментальдық жүйесін құру
2. (8) жүйенің шешуін табу
3. Осы табылған шешуді (6)-ға қою.

Мысал: $y'''+y'=\dfrac{1}{\sin x}$

$$y'''+y'=0;\quad \lambda^3+1=0,\ \lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm i$$

Теңдеу шешуінің фундаментальдық жүйесі $y_1=1;\ y_2=\cos x;\ y_3=\sin x$ болады, өйткені

$$W(x)=\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}=1\neq 0;$$

Берілген біртекті емес теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің шешуі:

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x;$$

Берілген біртекті емес теңдеу шешуін

$$y=C_1(x)+C_2(x)\cos x+C_3(x)\sin x$$

түрінде іздейміз. Енді алгебралық (8) жүйені құрамыз:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0 \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0 \\ -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Бұл жүйені $C_i'(x)$бойынша бірмәнді шешіледі, себебі оның негізгі анықтауышы $W(x) \neq 0$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{1}{\sin x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin x};$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -ctgx;$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1;$$

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{1}{\sin x}; C_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} + C_1 = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C_1;$$

$$C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = -\frac{\cos x}{\sin x}; C_2(x) = -\int \frac{\cos x}{\sin x}dx + C_2 = -\ln|\sin x| + C_2;$$

$$C_3'(x) = \frac{W_3(x)}{W(x)} = -1; C_3(x) = -\int dx + C_3 = -x + C_3;$$

Сонда:

$$y = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C_1 + \left(-\ln|\sin x| + C_2\right)\cos x + \left(-x + C_3\right)\sin x$$

берілген біртекті емес теңдеудің жалпы шешуі.

Өзін - өзі тексеруге арналған сұрақтар мен тапсырмалар.

1. Оң жақ бөлігі қосылғыштардың ақырлы сандар қосындысы түрінде берілген тұрақты коэффициентті сызықтық біртексіз теңдеулердің дербес шешімі қалай анықталады?

2. Оң жақ бөлігі $L(y) = P_m(x)e^{\alpha x}$, (мұндағы $P_m(x)$- m дәрежелі көпмүшелік, егер α сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің сипаттамалық теңдеуінің түбірі болмаса [егер α сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің сипаттамалық теңдеуінің түбірі болса]) көрсеткіштік функциясы арқылы

берілген тұрақты коэффициентті сызықтық біртексіз теңдеулердің дербес шешімі қалай анықталады?

3. Анықталмаған коэффициенттер әдісінің мәні неде?

4. Оң жағы тригонометриялық

$L(y) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + T_r(x)\sin\beta x),$ мұндағы $P_m(x), T_r(x)$ - m, r дәрежелі көпмүшелік, түрінде берілетін тұрақты коэффициентті сызықтық біртексіз теңдеулердің дербес шешімі қандай түрге ие?

5. Теңдеудің барлық нақты шешімдерін табыңдар:

а) $y''' + 2y' + 5y = 2x - 17\sin 2x$

б) $y''' - 6y'' + 10y' = 13\cos x + 10x$

6. Келесі біртексіз теңдеулердің дербес шешімдерінің жалпы түрін анықтау керек.

а). $y^{IV} - y^{III} = e^{x}\left(x^3 + 3x + 1\right);$

б). $y^{IV} - y^{III} = e^{2x}\sin 2x;$

в). $y^{IV} - y^{III} = 3e^{x}\left(2x^3 + 5x\right);$

г). $2y^{III} + 2y^{I} = 5\cos x;$

д). $5y^{IV} + 4y^{II} = 3\sin x;$

е). $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x).$

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.