9 дәріс

***Дәріс тақырыбы*: Коэффициенттері тұрақты n-ші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер.**

Жоспар.

1. Теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесі .
2. Сипаттаушы теңдеу түбірлеріне сәйкес теңдеудің жалпы шешімдері.
3. Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтірілетін n – ретті сызықтық теңдеулер.

1. Теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесі

Алдымен

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x},\ n = 0,1,2,...n; \qquad (1)$$

λ-нақты немесе комплекстік сандар болғанда орынды болатынын дәлеледейік.

1) λ-нақты сан болғанда (1) формула орынды болатыны белгілі

2) κ – комплекстік сан болсын, яғни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Эйлер формуласы бойынша

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y' = \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + e^{\alpha x}(-\beta \sin \beta x + i\beta \cos \beta x) =$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x};$$

Осыған ұқсас $\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]^{(n)} = (\alpha + i\beta)^n e^{(\alpha+i\beta)x}$ шығады.

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

теңдеуді қарастырайық, мұнда $a_i\left(i = \overline{1,n}\right)$-тұрақты коффициенттер.

(2) теңдеудің шешімін табу үшін теңдеу шешімінің фундаменталдық жүйесін табу қажет, яғни

$$y_1(x), y_2(x),..., y_n(x) \qquad (3)$$

(3) табылғаннан кейін (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \qquad (4)$$

болатыны белгілі, C_i -тұрақты шамалар

(2) тендеудің дербес шешуін Эйлер бойынша

$$y = e^{\lambda x} \qquad (5)$$

түрінде іздейміз, мұнда λ-нақты немесе комплекстік сандар.

(5) – ті (2) ге қойсақ:

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0$$

немесе

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x} \cdot P_n(\lambda) \qquad (6)$$

мұнда

$$P_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n=0 \tag{7}$$

немесе

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{8}$$

$P_n(\lambda)$ L операторының сипаттаушы көпмүшелігі, ал (8) теңдеу оның сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

2. Сипаттаушы теңдеу түбірлеріне сәйкес теңдеудің жалпы шешімдері.

(8) сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты, комплекстік сандар және еселік түбірлерде болуы мүмкін, осыларды жеке – жеке қарастырайық.

1) Айталық (8) теңдеудің түбірлері өзара тең емес

$$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \tag{9}$$

болсын дейік. Онда (5)-ке байланысты (2) теңдеудің дербес шешімдері

$$e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},...,e^{\lambda_n x} \tag{10}$$

болады.

Енді (10) шешулер тобының (2) теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесі болатын дәлелдеу қажет. Ол үшін *W(x)* вронскианды қарастырамыз.

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x}, & ..., & e^{\lambda_n x}, \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, & \lambda_n e^{\lambda_2 x}, & ..., & \lambda_n e^{\lambda_n x}, \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x}, & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 x}, & ..., & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{x\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}}_{\neq 0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = = \Big|$$ бұл

Вандермонд анықтауышы ол ешқашанда $\neq 0 \Big| \neq 0; W(x)\neq 0$ жоғарыда келтірілген теоремаларға байланысты (10) функциялар тобы (2) теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесін құрады.

Олай болса (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+...+C_ne^{\lambda_n x} \tag{11}$$

2) Айталық (8) теңдеудің түбірлері әртүрлі, бірақ арасында комплекстік түбірлері де бар болсын, яғни

$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ -*к* нақты түбірлер және

$\lambda_{k+1}=\alpha_{k+1}\pm i\beta_{k+1},\lambda_{k+2}=\alpha_{k+2}\pm i\beta_{k+2},...,\lambda_{k+m}=\alpha_{k+m}\pm i\beta_{k+m}$

2m комплекстік түбірлер (себебі комплекстік түбірлер түйіндес болатыны белгілі)

Түбірлердің саны $n=k+2m$ болады, әрбір түйіндес комплекстік шешімнен екі нақты шешімдер бөліп алынатыны белгілі. Сондықтан $e^{\lambda_j x}\cos\beta_j x, e^{\lambda_j x}\sin\beta_j x, j=m+1,...,m+k$. Сонымен n нақты шешімдер аламыз, осы шешімдерден сызықтық комбинация – теңдеудің жалпы шешімі

$$y=\sum_{j=1}^{k}C_je^{k_j x}+\sum_{j=k+1}^{k+m}A_je^{\alpha_j x}\cos\beta_j x+\sum_{j=k+1}^{k+m}B_je^{\alpha_j x}\sin\beta_j x \tag{12}$$

3) Айталық (8) сипаттаушы теңдеу түбірлері нақты сандар, әрі олардың арасында еселік түбірлер болсын дейік.

Егер λ түбірі S еселік болса, онда

$$P(\lambda)=0, P^{1}(\lambda)=0,\ldots,P^{(S-1)}(x)=0 \qquad (13)$$

L операциясы (амалы) және оны λ бойынша дифференциялдау орын алмастырымды болғандықтан

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[L\left(e^{\lambda x}\right)\right]=L\left(x^m e^{\lambda x}\right)=\left[e^{\lambda x}P(\lambda)\right]_{\lambda}^{(m)} \qquad (14)$$

Бұл көбейтіндіні дифференциялдау үшін Лейбниц ережесін пайдалансақ:

$$L\left[x^m e^{\lambda x}\right]=\left[e^{\lambda x}P(\lambda)\right]_{\lambda}^{(m)}=\sum_{j=0}^{m}C_m^j\left(e^{\lambda x}\right)^{(m-j)}P^{(j)}(\lambda) \qquad (15)$$

Айталық, (8) теңдеудің λ_1 S-еселік түбірі болсын, онда (15) сәйкес, әрі (13) еске алсақ:

$$\begin{aligned}
&m=0;\ L\left[e^{\lambda_1 x}\right]=0, \text{ демек } y_1=e^{\lambda_1 x}\\
&m=1;\ L\left[xe^{\lambda_1 x}\right]=0, \qquad y_2=xe^{\lambda_1 x}\\
&m=2;\ L\left[x^2e^{\lambda_1 x}\right]=0, \qquad y_3=x^2e^{\lambda_1 x}\\
&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\
&m=S-1;\ L\left[x^{S-1}e^{\lambda_1 x}\right]=0, \qquad y_S=x^{S-1}e^{\lambda_1 x}
\end{aligned} \qquad (16)$$

Сонымен

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2e^{\lambda_1 x},\ldots,x^{S-1}e^{\lambda_1 x} \qquad (17)$$

S шешім аламыз, бұлардың теңдеу шешімінің фундаменталдық жүйесі болатынын дәлелдеу қиын емес, себебі $W(x)\neq 0$.

Сондықтан (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y=e^{\lambda_1 x}\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_Sx^{S-1}\right) \qquad (18)$$

болады.

Жоғарғы айтылғандарға орай, егер (8) теңдеудің түбірлері λ_1 еселігі S_1, λ_2 еселігі $S_2,\ldots,\lambda_k$ еселігі S_k мұнда $S_1+S_2+\ldots+S_k=n$ болса, (2) теңдеудің төмендегі шешімі болады.

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x},\ldots,x^{S_1-1}e^{\lambda_1 x}\\
&e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x},\ldots,x^{S_2-1}e^{\lambda_2 x}\\
&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\
&e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x},\ldots,x^{S_k-1}e^{\lambda_k x}
\end{aligned} \qquad (19)$$

Бұл жағдайдағы (2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y=\sum_{j=1}^{k}P_j(x)e^{\lambda_j x} \qquad (20)$$

мұнда

$$P_j(x)=C_1^j+C_2^j x+\ldots+C_{S_j}^j x^{S_j-1}$$

Мысал:1) $y'''-2y''-y'+2y=0$

сипаттама теңдеуі $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1;$

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+C_3e^{-x}$ жалпы шешімі.

2) $y'''+3y''+3y'+y=0$

сипаттама теңдеуі

$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0\ \ (\lambda+1)^3=0$

$\lambda=-1$ 3 еселік түбірі бар, сондықтан

$y=e^{-x}\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right);$

3) $y''+2y'+9y=0$

$\lambda^2+2\lambda+9=0;\lambda_{1,2}=-1\pm2i\sqrt{2};$

$\overline{y}=e^{\left(-1\pm2i\sqrt{2}\right)x}=e^{-x}\cdot e^{\pm2i\sqrt{2}}=e^{-x}\left(\cos2\sqrt{2}x\pm i\sin2\sqrt{2}x\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\overline{y_1}=e^{-x}\cos2\sqrt{2x};\ \overline{y_2}=e^{-x}\sin2\sqrt{2}x$

$y=e^{-x}\left(C_1\cos2\sqrt{2}x+C_2\sin2\sqrt{2}x\right)$

3. Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтіретін n – ретті сызықтық теңдеулер

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+P_2y^{(n-2)}+\ldots+P_{n-1}y'+P_n(x)y=0 \qquad (21)$$

біртекті n-ретті сызықтық теңдеуді қарастырайық, мұнда $P_i(x)\left(i=\overline{1,n}\right)$-коэффициенттері айнымалы шамалар, x-тің функциялары.

(21) теңдеуде тәуелсіз айнымалыны ауыстыру арқылы, оны коэффициенттері тұрақты теңдеуге келтіру мәселесін қарастырайық.

$$t=\psi(x) \qquad (22)$$

ауыстыруын қолданайық.

Сонда:

$$\begin{aligned}&y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\psi'(x);\\&y''_x=y''_t[\psi'(x)]^2+y'_t\psi''(x);\\&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\&y_x^{(n)}=y_t^{(n)}[\psi'(x)]^n+\ldots+y'_t\psi^{(n)}(x);\end{aligned} \qquad (23)$$

(22) – ні (21) – ге қойып $[\psi'(x)]^n$ бөлсек, мына теңдеу шығады.

$$y_x^{(n)}+\ldots+\frac{P_n(x)}{[\psi'(x)]^n}y=0 \qquad (24)$$

(24) теңдеудегі $\psi(x)$ функциясын y алдындағы коэффициент тұрақты шама болатындай етіп алуымыз қажет. Сондықтан

$$\frac{P_n(x)}{[\psi'(x)]^n} = \frac{1}{C^n}; C - const$$

Бұдан

$$\psi'(x) = C\sqrt[n]{P_n(x)};$$
$$\psi(x) = C\int \sqrt[n]{P_n(x)}dx \qquad (25)$$
$$t = C\int \sqrt[n]{P_n(x)}dx$$

шығады.

Бұл Еругин формуласы деп аталады. Егер (21) теңдеу коэффициенттері тұрақты теңдеуге айналатын болса, онда ол тек қана (25) ауыстыру формуласы арқылы келтіріледі.

Енді (25) ауыстыру формуласы арқылы тұрақты коэффициентті теңдеуге келтірілетін теңдеулерді қарастырайық.

1) Эйлер теңдеуі:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0 \qquad (26)$$

Эйлер теңдеуі деп аталатын теңдеу берілсін, мұнда $a_i\left(i = \overline{1, n}\right)$-тұрақты нақты сандар. (21) және (26) теңдеуді салыстырсақ, $P_n(x) = \frac{a_n}{x^n}$ шығады.

(25) – ке сәйкес

$$t = C\int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}}dx$$

Бұдан $C = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ деп алсақ,

$$t = \ln x \text{ немесе } x = e^t; \qquad (27)$$

Сонда:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t e^{-t};$$
$$y''_x = \left(y'_x\right)' = \left(y''_t e^{-t} - y'_t e^{-t}\right)e^{-t} = \left(y''_t - y'_t\right)e^{-2t};$$
$$y'''_x = \left(y''_x\right)' = \left(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t\right)e^{-3t}; \qquad (28)$$
$$- -$$
$$y_x^{(n)} = \left[y_t^{(n)} + \ldots + (-1)^{(n-1)}(n-1)!\, y'_t\right]e^{-nt};$$

Енді (27), (28)-ді (26)-ға қойсақ, $x^k = e^{kt}$, e^{-kt} көбейткіштер өзара жойылып, n-ретті біртекті, коэффициенттері тұрақты болып келген теңдеу аламыз.

<u>Ескерту:</u> Эйлер теңдеуі келтірілетін тұрақты коэффициентті теңдеудің дербес шешулері $e^{\lambda t}$ және $t^m e^{\lambda t}$ болғандықтан, Эйлер теңдеуінің дербес шешулері x^{λ} және $(\ln x)^m x^{\lambda}$ болар еді. Сондықтан Эйлер теңдеуінің шешуін

$y = x^{\lambda}$ түрінде алып интегралдауға болады. Мұнда $\lambda, P(\lambda) = 0$ теңдеуінің түбірі, яғни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ болуы мүмкін. Онда Эйлер теңдеуінің дербес шешулері $y_1 = x^{\lambda_1}, y_2 = x^{\lambda_2}, ..., y_n = x^{\lambda_n}$ болады да, жалпы шешуі

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k x^{\lambda k} \tag{29}$$

Мысал: $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

(27) ауыстыруын қолданып, (28)-ді еске алсақ, $y_t''' - 3y_t' + 2y_t = 0$ шығады.

Сипаттама теңдеуінің түбірлері $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = \lambda_3 = 1;$

Сондықтан мұның жалпы шешуі $y_t = C_1 e^{-2t} + (C_2 + C_3 t)e^t$; ал Эйлер теңдеуінің жалпы шешуі $y_x = \dfrac{C_1}{x^2} + x(C_2 + C_3 \ln x);$

2) Чебышев теңдеуі:

Төмендегі теңдеуді қарастырайық

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \ (n\text{-}const) \tag{30}$$

Мұнда $x = \pm 1$ ерекше нүктелер болғандықтан, $J = \{x \in R : |x| \neq 1\}$ жиынында шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теореманың барлық шарттары орындалады.

Біз (30) теңдеудің $(-1, +1)$ аралығындағы жалпы шешуін табайық.

Ол үшін (25) – те $C = -\dfrac{1}{n}$ деп алсақ, $t = \arccos x$ немесе $x = \cos t$ (31) ауыстыру формуласын аламыз. Осы ауыстыру бойынша

$$\begin{aligned} y_x' &= y_t' \cdot t_x' = y_t' \frac{1}{x_t'} = -y_t' \frac{1}{\sin t} \\ y_x'' &= \left(y_t'' \frac{1}{\sin t} - y_t' \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right)\left(-\frac{1}{\sin t} \right) = y_t'' \frac{1}{\sin^2 t} - y_t' \frac{\cos t}{\sin^3 t}; \end{aligned} \tag{32}$$

(32) – ні (30) – ға қойсақ:

$$y_t'' + n^2 y = 0 \tag{33}$$

шығады.

Бұл теңдеудің жалпы шешуі

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt \tag{34}$$

болғандықтан, Чебышев теңдеуінің шешуі (31) бойынша

$$y = C_1 \cos n \arccos x + C_2 \sin n \arccos x;$$

Бұдан $T_n = \cos n \arccos x = y_1$ дербес шешуі Чебышев көпмүшелігі деп аталады.

Тапсырмалар.

Тапсырмалар тестіге дайындық ретінде тест түрінде берілген.

1. $y^{II} + 2y^I + y = 0$ теңдеуін интегралдау керек.

A) $y=(C_1+C_2x)xe^{-x}$

B) $y=Cx^2e^{-x}$

C) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$

D) $y=\left(C_1+C_2x+x^2\right)e^{-x}$

E) дұрыс жауабы жоқ.

2. Теңдеуді шешіңіз: $y^{III}+y^{I}=0$.

A) $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$;

B) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$;

C) $y=C_1\cos xe^{x}$;

D) $y=C_1e^{x}\sin x$;

E) дұрыс жауабы жоқ.

3. Теңдеуді шешіңіз: $y^{IV}+y^{II}=0$.

A) $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3\cos x+C_4$;

B) $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x$;

C) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3$;

D) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x$;

E) дұрыс жауабы жоқ.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.

10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.