8 дәріс

***Дәріс тақырыбы:* Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер.**
Жалпы теория

Жоспар

1. n-ретті сызықтық теңдеу түрлері. Анықтамалар және сызықтық оператор қасиеттері
2. Функциялар тобының сызықтық тәуелділігі мен тәуелсіздігі. $y_1, y_2, ..., y_n$ теңдеудің дербес шешімдері болған жағдайдағы олардың өзара сызықтық тәуелсіздігі.
3. Вронский анықтауышы.
4. Остроградский – Лиувилль формуласы.

1. n***-ретті сызықтық теңдеу түрлері. Анықтамалар және сызықтық оператор қасиеттері***

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

n ретті дифференциалдық теңдеу деп аталады, мұнда $F-(n+2)$ айнымалының функциясы, ал y ізделінетін белгісіз функция.

Егер (1) теңдеу жоғарғы туындысы арқылы айқындалса, мына түрде болады:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Егер (1) теңдеу

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (3)$$

түрінде берілсе, оны n-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп атайды, мұнда $f(x), p_i(x)\left(i = \overline{1,n}\right)(a,b) \in X$ аралығында үзіліссіз берілген функциялар. (3) теңдеудің сол жағын $L_n[y] = L[y]$ арқылы белгілеп, оны сызықтық дифференциалдық оператор деп атаймыз,

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y;$$

Оператор қасиеттері:

1) $L[Cy] = CL[y]$; C-const, оператордың біртектілігі

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$; оператордың аддитивтігі

Біртекті және аддитивті оператор әрқашанда сызықтық болатынын еске алайық.

3)Жоғарғы қасиеттерінен

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right] = \sum_{k=1}^{n} C_k L[y_k] \qquad (4)$$

оңай шығады, C_k кез-келген тұрақты. (3) теңдеуді оператор арқылы қысқаша $L_n[y] = f(x)$ (3) жазуға болады, мұны біртекті емес сызықтық теңдеу, ал егер $f(x) \equiv 0$, яғни

$$L_n[y] = 0 \qquad (5)$$

болса біртекті сызықтық теңдеу деп атайды.

Коши есебі.

(3) сызықтық теңдеу үшін бұл есеп былайша қойылады:

$$y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)} \in X$$

кез – келген n саны берілгенде, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ бастапқы шарттарды қанағанттандыратын (3) теңдеудің шешуін табу қажет. Біртекті (5) теңдеудің шешімі жөнінде

Теорема: Егер

$$y_1, y_2, ..., y_m \tag{6}$$

біртекті теңдеудің шешімдері болса, онда сызықтық комбинация

$$y = \sum_{k=1}^{m} C_k y_k$$

теңдеудің шешімі болады.

Мұны дәлелдеу (4) қатынастан шығады. Біртекті теңдеудің шешімдер тобына тікелей қатысы бар сызықтық тәуелсіз функциялар ұғымын енгізейік.

2. Функциялар тобының сызықтық тәуелділігі мен тәуелсіздігі. $y_1, y_2, ..., y_n$ теңдеудің дербес шешімдері болған жағдайдағы олардың өзара сызықтық тәуелсіздігі

Анықтама. $y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)$ (6) функциялар $(a,b) \in X$ –те сызықты тәуелді болады, егер ең жоқ дегенде біреуі нольге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ сандары бар болып

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_m y_m(x) \equiv 0 \tag{7}$$

болса, $\forall x \in (a,b)$; Егер(7) тепе-теңдік тек қана барлық $a_i\left(i = \overline{1,m}\right) = 0$ болғанда ғана орындалса, онда (5) функциялар тобы (a,b)–да сызықты тәуелсіз болады.

Анықтама. $(a,b) \in X$ -те $P_k(x)(k = \overline{1,n})$ үзіліссіз коэффициенттері бар (5) біртекті n-ретті дифференциалдық теңдеудің n сызықты тәуелсіз шешімдері осы теңдеу **шешімдерінің фундаментальдық жүйесі** деп аталады.

(5) біртекті n–ретті теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, алдымен оның шешімдерінің фундаментальдық жүйесін, яғни өзара сызықты тәуелсіз

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$$

шешімдерін табу керек.

3. Вронский анықтауышы.

$y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ (6) функциялар тобы берілсін. Осы функциялар және олардың $(n-1)$–ретті туындыларынан құрылған

$$W(x)=W[y_1, y_2,..., y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

анықтауышты Вронский анықтауышы деп атайды. Осы анықтауыш арқылы (6) функциялар тобының сызықты тәуелді не тәуелсіз болатынын білуге болады.

1. теорема: Егер $(a,b)\in X$ –те $(n-1)$ ретке дейінгі туындылары бар (6) функциялар тобы өзара сызықты тәуелді болса, онда $W(x)=0 \quad \forall x \in (a, b)$

Дәлеледеу: (6) функциялар тобы (a,b)–да сызықты тәуелсіз болғандықтан, анықтама бойынша барлығы бірдей нольге тең болмайтын $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ сандары бар болып, (a,b) аралығында (7) қатынас орындалады. (6) қатынасты n рет дифференциалдап, мына төмендегідей жүйені аламыз:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x)+....+\alpha_n y_n(x)=0 \\ &\alpha_1 y_1'(x)+....+\alpha_n y_n'(x)=0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_1 y^{(n-1)}{}_1(x)+....+\alpha_n y_n{}^{(n-1)}\ (x)=0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Бұл жүйенің мардымсыз емес (нольдерден басқа, себебі, ең жоқ дегенде бір $\alpha_i \neq 0$) шешімі бар. Ал бұл жүйенің негізгі анықтауышы нольге тең болғанда орындалады, ол Вронский анықтауышы еді, басқаша $W(x)=0$. Теорема дәлелденді.

Мысал: $y_1 = 5, y_2 = \cos^2 x, y_3 = \sin^3 x$ берілген. $(-\infty;+\infty)$ аралығында осы функциялардың сызықты тәуелсіздігін зертте?

$$W(x)=W\left[5, \cos^2 x, \sin^2 x\right]=\begin{vmatrix} 5 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix}=0$$

Берілген функциялар $(-\infty,+\infty)$ да өзара сызықты тәуелді.

2. теорема: Егер $(a,b)\in X$ -те $(n-1)$ ретке дейінгі туындылары бар (6) функциялар тобы, осы аралықта сызықты тәуелсіз болса, онда $W(x)\neq 0$ болуы қажетті және жеткілікті $(\forall x \in [a,b])$

Дәлелдеу: Керісінше жорып, $x = x_0 \in [a,b]$ нүктесінде $W(x) = 0$ деп алайық. Бір уақытта нольге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сандары

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ &\alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ &.................................. \\ &\alpha_n y^{(n-1)}{}_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n{}^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

жүйенің шешімі болсын. Мұндай сандар бар болады, себебі жүйенің негізгі анықтауышы $W(x_0) \equiv 0$ онда 1-теоремаға сәйкес

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{11}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (5) біртекті теңдеудің шешімі

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(x) \tag{12}$$

Бұл шарттарды $y \equiv 0$ мардымсыз шешімі де қанағаттандырады. Теңдеу шешімінің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теоремаға сәйкес (11) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз ғана шешім болуы керек. Сондықтан (5) теңдеудің шешімі (12) болады. Демек, керісінше жоруымыз, (6) функциялар тобы сызықтық тәуелді деп алу дұрыс емес.

Теорема дәлелденді.

Мысал: $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x$

Вронский анықтауышының мәндеріне сәйкес (нольге тең не тең емес) берілген функциялар тобының сызықты тәуелсіздігін анықта?

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2 e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x e^x e^x \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = 2e^x \neq 0$$

x-тің кез-келген мәнінде.

Демек, $e^x, xe^x, x^2 e^x$ өзара сызықты тәуелсіз функциялар.

4. Остроградский – Лиувилль формуласы.

n-ретті біртекті сызықтық (5) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ берілсін.

Демек,

$$L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, ..., L[y_n] = 0 \tag{14}$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Осы вронскианның туындысын жатық жолдары бойынша табайық

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

n анықтауыштардың ең соңғысынан басқасы нольге тең, себебі әрқайсысында екі өзара тең жатық жолдары бар. Сондықтан

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

(16) анықтауыштың 1-жатық жолының элементтерін $p_n(x)$-ке, 2-жатық жолдарының элементтерін $p_{n-1}(x)$ке т.с.с. $(n-2)$ жатық жолының элементтерін $p_2(x)$-ке көбейтіп, ең соңғы сәйкес элементтеріне қоссақ

$$\begin{aligned} & y_j^{(n)}+p_2(x)y_j^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}(x)y_j'+p_n(x)y_j= \\ & =L[y_j]-p_1(x)y_j^{(n-1)}=-p_1(x)y_j^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (17)$$

$\left(j=\overline{1,n}\right)$ шығады. Сондықтан

$$W'(x)=-p_1(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$W'(x)=-p_1(x)W(x)$ бұдан $W(x)=Ce^{-\int p_1(x)dx}$ шығады. c-кез-келген тұрақты.

Егер $C=W(x_0)$ деп алсақ, $\forall x_0\in(a,b)$

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \tag{18}$$

Бұл Остраградский-Лиувилль формуласы.

Қасиеттері:

1^0. Егер $W(x_0)=0$ болса, онда $\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ үшін $W(x)=0$, $\mathrm{x}_0\in(a,b)$,

2^0. Егер $W(x_0)\neq 0$ болса, онда $\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ үшін $W(x)\neq 0$

3^0. Егер $p_1(x)=0$ болса, онда $W(x)=W(x_0)$.

(18) формула арқылы (5) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесін табамыз, ол үшін $W(x\ )\neq 0$;

Мысал: 3-ретті бір диффенренциалдық теңдеудің шешімдері $y_1=1, y_2=\cos x, y_3=\sin x$ болсын.

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\neq 0$$

Сондықтан $1,\cos x,\sin x$ өзара сызықты тәуелсіз, теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі болады, ендеше теңдеу жалпы шешуі $y=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$

1. теорема. n-ретті біртекті

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=0 \tag{19}$$

теңдеу берілсін. (a,b) аралығында үзіліссіз коэффициенттері бар (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі бар болады.

Дәлеледеу: Анықтауышы нольден өзгеше, $\det A\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{20}$$

матрицасын алайық. (19) теңдеу үшін бастапқы берілгендері

$$y(x_0)=a_{1j}, y'(x_0)=a_{2j},\dots,y^{(n-1)}(x_0)=a_{nj}\ \ (\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}})$$

$x_0 \in (a,b)$ бар Коши есебін қарастырайық. Теңдеудің бұған сәйкес шешімі $y_j(x)$ болсын. j-ға $1,2,...,n$ мәндерін беріп, (a,b) аралығында $y_1, y_2,..., y_n$ n шешім алсақ, олардан құрылған $W(x) \neq 0$ себебі $W(x_0) = \det A \neq 0$ сондықтан бұл шешімдер (a,b) аралығында сызықты тәуелсіз болғандықтан, (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі.

2. теорема. Егер $y_1, y_2,..., y_n$ функциялар тобы (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі болса, онда оның жалпы шешімі

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k \tag{21}$$

Дәлелдеу: Жалпы анықтама бойынша n тұрақты шамалары бар шешім жалпы шешім болады және тұрақтыларға белгілі бір сан мәндер бергенде дербес шешулер шығуы керек. Ал шешімінің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша дербес шешім $x = x_0$ болғанда

$$y = y_0, y' = y'_0,..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \tag{22}$$

шарттар арқылы бірмәнді түрде анықталады.

$C_i (i = 1, \overline{n})$ тұрақтыларды табу үшін төмендегі жүйені қарастырайық

$$\begin{aligned} &c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + ... + c_n y_{n0} = y_0 \\ &c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} + ... + c_n y'_{n0} = y'_0 \\ &.................................... \\ &c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + ... + c_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{23}$$

Мұнда y_{k0}, $\mathrm{y_k}(x)$ функциясының $x = x_0$ болғандағы мәндері $y_{k_0}^{(i)}$ $\mathrm{y_k^{(i)}}(x)$ туындыларының $x = x_0$ болғандағы мәндері.

(23) жүйенің анықтауышы x орнына x_0 қойылғандағы Вронский анықтауышы, 3-теоремаға сәйкес $W(x_0) \neq 0$. Сондықтан (23) жүйенің жалғыз ғана $C_1, C_2,..., C_n$ шешімдері бар. (21) қатынас C-ның осы мәндері бойынша (22) бастапқы шарттарды қанағаттандырады.

Теорема дәлелденді.

Теорема 6: (5) n ретті біртекті сызықты теңдеудің комплекстік шешімінен екі заттық шешім бөліп алуға болады.

Айталық (5) теңдеудің шешімі $y = u(x) \pm iv(x)$ болсын, мұнда $u(x)$ нақты бөлігі, ал $v(x)$ жорамал бөлігі, екеуі де x тің нақты функциялары. Сызықтық дифференциалдық операторды қолдансақ, әрі қасиеттері бойынша

$$L[u(x) \pm iv(x)] = L[u(x)] \pm iL[v(x)] = 0$$

Бұл тек қана $L[u(x)] = 0, L[v(x)] = 0$ болғанда ғана орындала-ды. Сондықтан $y_1 = u(x), y_2 = v(x)$ теңдеудің заттық шешімдері.

Мысал: $y'' + y = 0$ $\lambda^2 + 1 = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm i;$

$y = e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ берілген теңдеудің шешімі.

$$L[\cos x \pm i \sin x] = L[\cos x] \pm iL[\sin x] = 0$$

Бұдан $L[\cos x]=0, L[\sin x]=0$ шығады. Олай болса $y_1=\cos x$ және $y_2=\sin x$ берілген теңдеудің заттық шешімдері.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.