7 дәріс

Дәріс тақырыбы: **Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті теңдеулер.**

Жоспар

1. Реті төмендетілетін жоғарғы ретті теңдеулер түрлері.
2. Теңдеу ретін төмендету үшін белгісіз функция туындысын ауыстыру жағдайлары.

1. Реті төмендетілетін жоғарғы ретті теңдеулер түрлері.

Мына теңдеуді қарастырайық:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

Егер $n > 1$ болса, онда (1) теңдеу жоғарғы ретті жай дифференциалдық теңдеу деп аталады.

***Ескерту*:** $n = 1$ болғандағы жағжайда жай дифференциалдық теңдеуді шешудің толып жатқан әдістерін білеміз. Осыған байланысты жаңа айнымалылар арқылы ауыстыру формуласын қолданып, (1) теңдеудің ретін төмендетуге болар ма еді, тіпті кейде осы ауыстыруларды біртіндеп қолданып дифференциалдық теңдеуді 1-ретке дейін түсіруге болатын шығар.

Осындай есептерді шешу үшін, төмендегі 5 жағдайды қарастырайық:

1) (1) теңдеу y-ке, оның кейбір ретті туындыларына байланысты былай берілген, мәселен,

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0; \;\; n \geq k > 1 \tag{2}$$

Бұл жағдайда

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \\ y^{(k)} = Z \end{cases} \tag{3}$$

Ауыстыруы арқылы (2) теңдеудің реті бірден k төмендедетіледі; яғни

$$F(x, z, z', z'', ..., z^{(n-k)}) = 0 \tag{4}$$

Мысал: $x(y'' + y''') = y''$ теңдеуі берілсін.

$y'' = z(x)$, онда $y''' = z'$

$$xz' = z - xz'; \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{1-x}{x} dx$$

$$z = C_1 x e^{-x}$$

$$y'' = C_1 x e^{-x}$$

Екі рет интегралдап, белгісіз функция y-ті табамыз.

***Ескерту*:** Егер $n - k = 1$ болса, оған 1-ретті теңдеудегі қолданған әдістер жеткілікті, ал $n - k > 1$ онда мүмкін тағы да бір айырбастау қолдану қажет болар.

Айталық, (4) теңдеудің жалпы шешуі $z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ табылды дейік.

Онда (3)-ке сәйкес $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$

Мұны шешу қиын емес.

2) (1)теңдеу x-ке байланысты емес, яғни

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{5}$$

Бұл теңдеудің реті мына төмендегі ауыстыру арқылы төмендетілетінін көрсетейік:

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \to \begin{cases} x \\ z = z(y) = y' \end{cases} \tag{6}$$

$$y''_x = [(y'_x)]'_x = (z')_y y'_x = z \cdot z';$$

$$y'''_x = (z \cdot z')'_x = (z \cdot z')'_y \cdot y'_x = z\left(z'^2 + z \cdot z''\right)$$

т.с.с.

математикалық индукция заңы бойынша, $\forall k \geq 2$болғанда

$$y_x^{(k)} = g_k\left(z, z'_y, ..., z_y^{(k-1)}\right) \tag{7}$$

Мұнда g_k-өзінің айнымалыларына байланысты көпмүшелік.

Барлық k үшін (7)-ні (5) қойып, реті 1-ге төмендетілген $(n-1)$ретті теңдеу аламыз, ол z-ке байланысты болады, яғни

$$F(y, z, z', z'', ..., z^{(n-1)}) = 0$$

Мысал: $\qquad yy'' - (y')^2 = 0$

$$y'_x = z(y);$$

$y''_x = z \cdot z'$ теңдеудегі y', y'' орнына қойсақ.

$\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dy}{y}$ шығады.

$$z = Cy; y' = Cy; \frac{dy}{dx} = Cy$$

$$y = C_2 e^{C_1 x};$$

3) (1) теңдеудің сол жағы дәл туынды болатын жағдай.

Айталық (1) теңдеудің сол жағы қандайда бір $\phi\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ функциясының толық туындысы болсын дейік, яғни

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\phi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{8}$$

немесе

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \phi}{\partial y'} y'' + ... + \frac{\partial \phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)};$$

Бұл теңдеу барлық $x, y, y', y'', ..., y^{(n)}$ айнымалылары бойынша орындалады. Сол себептен (1) теңдеудің жалпы интегралы

$$\phi\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right) = C_1$$

болады.

Демек, берілген теңдеудің реті бірге төмендетіледі. Егер (1) теңдеудің сол жағы басқа бір функцияның дәл туындысы болмаса, онда оған келтіру үшін теңдеудің екі жағын интегралдаушы көбейткіш деп аталатын $\mu = \mu\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right)$ функциясына көбейту қолайлы.(егер ондай функция бар болса, табылса).

Бұл жағдайда (1) теңдеудің жалпы интегралын табумен бірге, оның ерекше шешуін де табуға болады, мәселен

$\frac{1}{\mu} = 0$ теңдеуін шешу керек.

Мысал: $yy'' = -(y')^2$;

$$yy'' + (y')^2 = 0; \frac{d}{dx}(yy') = 0$$

$$yy' = C_1 \Rightarrow ydy = C_1 dx; y^2 = C_1 x + C_2$$

4) (1) теңдеу белгісіз функция y және оның туындылары бойынша біртекті болатын жағдай. (1) теңдеу біртекті деп аталады, егер барлық t үшін

$$F(x, ty, ty',..., ty^{(n)}) = t^m F\left(x, y, y',..., y^{(n)}\right) \tag{9}$$

теңдігі орындалатын болса,

Бұл жағдайда

$$\frac{y'}{y} = z \tag{10}$$

$z = z(x)$ жаңа белгісіз функция.

Онда: $y' = yz$

$$\begin{aligned} y'' &= y(z^2 + z') \\ y''' &= y(z^3 + 3zz' + z'') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= y\omega\left(z, z', z'',..., z^{(n-1)}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Немесе (10)-ды интегралдасақ,

$$\ln|z| = \int z dx \Rightarrow z = e^{\int z dx} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{\int z dx} z \\ y'' &= e^{\int z dx}(z^2 + z') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= e^{\int z dx}\omega\left(z, z',..., z^{(n-1)}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

(12)-ні (1) теңдеуге қойып, біртекті қасиетін пайдаланып, теңдеудің екі жағын

$e^{m\int zdx}$-ке қысқартсақ, реті 1-ге төмендетілген z–ке байланысты

$$F\left(x, z, z', ..., z^{(n-1)}\right) = 0 \qquad (13)$$

теңдеу шығады.

Егер (13) теңдеудің жалпы шешуін табуға мүмкіндік болса, мәселен

$$z = \varphi(z, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

Онда оны (10)-ға қойып белгісіз функция y–ті табамыз

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) \Rightarrow$$

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})dx}; \qquad (14)$$

Егер (13) теңдеудің жалпы шешуі табылмайтын болса$(n-1>1)$, онда оның ретін тағы да төмендету үшін жоғары да айтылған жағдайдың бірін қолдануға тура келеді.

Мысал: $yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$ біртекті (2 өлшем)

$y = e^{\int zdx}$ ауыстыруын қолданамыз.

Сонда $z' = 6x$ шығады.

$$z = 3x^2 + C_1$$

$$y = e^{\int(3x^2 + C_1)dx} = C_2 e^{(x^3 + C_1 x)};$$

5) (1) теңдеу жалпыланған біртекті болатын жағдай.

Егер $x, y, y', ..., y^{(n)}$ аргументтерін сәйкес бір, $k, (k-1), ..., (k-n)$ өлшемдес шамалар деп есептесек, яғни

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y', ..., t^{k-n} y^{(n)}\right) = t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \qquad (15)$$

орындалатын болса, онда (1) теңдеу жалпыланған біртекті теңдеу деп аталады. Бұл жағдайда (1) теңдеуді интегралдау үшін, белгілі жалпыланған біртекті теңдеудің қасиеттерін пайдаланып x және y орнына

$$x = e^t, y = ze^{kt} \qquad (16)$$

ауыстыруын пайдаланамыз.

Сонда $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$

Мынаны еске алу қажет: белгісіз функцияның x бойынша туындыларын енгізілген жаңа z функциясының жаңа t бойынша туындыларымен ауыстыру қажет.

Бұл жағдайда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{\int(k-1)t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \left[\frac{d^2z}{dt^2} + (2k-1)\frac{dz}{dt} + k(k-1)z\right]e^{(k-2)t} \qquad (17)$$

....

$$y^{(n)} = \omega\left(z, z'_t, z''_t, \ldots, z_t^{(n)}\right)e^{(k-n)t}$$

(15) және (16)-ны (1)теңдеуге қойып, екі жағын e^{mt} – ға қысқартсақ:

$$F(1, z, z' + kz, \ldots, \omega\left(z, z', \ldots, z^{(n)}\right)) = 0 \qquad (18)$$

теңдеуі шығады.

Бұл теңдеуде тәуелсіз айнымалы t болғандықтан 2) дегі әдіспен (18)-дің ретін бірге төмендетуге болады.

Мысал: $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$ теңдеуін интегралдау керек.

Теңдеудегі x, y, y', y'' айнымалыларын сәйкес $1, k, k-1,$ $k-2$ дәрежелі шамалар деп есептеп, қосылғыштардың дәрежесін өзара теңестіреміз:

$4 + (k-2) = 3 + 3(k-1) = 3k$ бұдан $k = 1;$

Бұл теңдіктердің бәрін бірдей қанағаттандыратын k саны бар, сондықтан берілген теңдеу жалпыланған біртекті, ендеше

$$x = e^t, y = ze^t (k = 1)$$

ауыструуын қолданамыз, сонда

$z'' + z' - z'^3 = 0$ теңдеуі шығады.

Бұл теңдеу құрамында жаңа айнымалы t жоқ, сондықтан әрі қарай $z' = p(z)$ ауыстыруын қолданамыз, сонда $z'' = p\frac{dp}{dz}$ орындарына қойсақ,

$$p\frac{dp}{dz} = \left(-1 - p^2\right)$$

шығады немесе $p\left(\frac{dp}{dz} + 1 + p^2\right) = 0$, $\frac{dp}{dz} = -1 - p^2$ және $p = 0$

2-теңдеуге сәйкес $z' = 0; z = C$ немесе $y = Cx$,

1-теңдеуден (айнымалылары бөлектенген теңдеу)

$$z = C_1 + \arcsin C_2e^{-t}$$

шығады.

Сонымен $y = zx$ ауыстыруын еске алып және $e^{-t} = \frac{1}{x}$ болғанда $y = x\left(C_1 + \arcsin\frac{C_2}{x}\right)$ жалпы шешуі. Ал $y = Cx$ шешуі осыдан $C_2 = 0; C_1 = C$ болғанда шығады.

2. Теңдеу ретін төмендету үшін белгісіз функция туындысын ауыстыру жағдайлары.

Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулердің кейбір түрлерін көрсетейік.

1. $y^{(n)} = f(x)$ түріндегі теңдеуін n – еселік интегралдаудан кейін келесі жалпы шешім шығады:

$$y = \int \ldots \int f(x)\, dx \ldots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

2. $F\,(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу, яғни теңдеу құрамына ізделінді функция мен оның k-1 ретті туындысына дейінгілері кірмейді.

$y^{(k)}(x) = p(x)$ ауыстыруынан кейін теңдеу келесі түрге келеді: $F\,(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$.

Бұл теңдеуден анықтайтынымыз: $p = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, бұдан кейін $y^{(k)}(x) = p(x)$ кері ауыстыруын жасап, $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ теңдеуін k рет интегралдап y - ті табамыз.

3. $F\,(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу, яғни теңдеу құрамына тәуелсіз айнымалы кірмеген жағдай, $y' = p(y)$ ауыстыруынан кейін барлық $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ туындылары y- тан тәуелді жаңа p функциясының туындысы арқылы өрнектеледі:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p\,;\; y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy} = p\,p'\,;$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\,\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$ және т.с.с.

Бұл өрнектерді теңдеуге қоя отырып, (n-1) ретті дифференциалдық теңдеуді аламыз.

4. $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ аргументтеріне қатысты біртекті $F\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу, яғни $F\,(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^k\, F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ теңдеу $y' = yz$, $z = z(x)$ ауыстыруы арқылы шығады.

5. $F\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ түріндегі жалпыланған-біртекті теңдеу, яғни келесі ауыстыруларды жасағанда өзгеріс болмайды:

$$x \to kx,\; y \to k^m y,\; y' \to k^{m-1} y',\; \ldots,\; y^{(n)} \to k^{m-n} y^{(n)} .$$

Мұндай теңдеудің ретін $x = e^t, y = z(t)e^{mt}$ ауыстыруы арқылы төмендетуге болады.

6. Теңдеудің реті оңай төмендетіледі, егер теңдеудің екі жағын да қандай да бір функцияның x бойынша толық туындысына келтіруге болатын болса.

Мысалға, $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, $(xy)' = y + xy'$, $\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{y - xy'}{y^2}$ және т.с.с.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.