6 дәріс

***Дәріс тақырыбы:* Туындысы арқылы айқындалмаған 1-ретті дифференциалдық теңдеулер. Лагранж және Клеро теңдеуі**

Жоспар

1. Туындысы арқылы айқындалмаған теңдеудің түрлері.
2. Туындысы арқылы айқындалмаған 1-ретті дифференциалдық теңдеулер шешу әдісі.
3. Лагранж, Клеро теңдеулерін интегралдау, бір-бірінен айырмашылықтары. Ерекше шешімдері.

1. *Туындысы арқылы айқындалмаған теңдеудің түрлері*

Мына теңдеуді қарастырайық:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

Мұндай теңдеулер үшін жай дифференциалдық теңдеулер теориясында көптеген есептер қарастырылады.

Интегралдау мәселесі:

1) Айталық (1) теңдеу y' арқылы айқындалған болсын, онда бірнеше теңдеулер жиынтығын алған болар едік, мәселен

$$\begin{aligned} &y' = f_1(x, y) \\ &y' = f_2(x, y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y' = f_m(x, y) \end{aligned} \tag{2}$$

мұнда $m \leq \infty$

Бұл жағдайда (1) теңдеудің шешуін табу үшін, (2) теңдеудің әрқайсының шешуін табу қажет. Осы шешулердің жиынтығы (1) теңдеудің шешімі болар еді. Бұл жағдайда (1) теңдеудің шешімі түгелдей табылама, жоқпа? Деген сұрақ тууы мүмкін.

Есеп:

$$y'^2 + (2x + y)y' + 2xy = 0 \tag{3}$$

теңдеуі берілген. Бұл y' - қа қатысты квадрат теңдеу болғандықтан

$$y' = 2x$$

$$y' = y$$

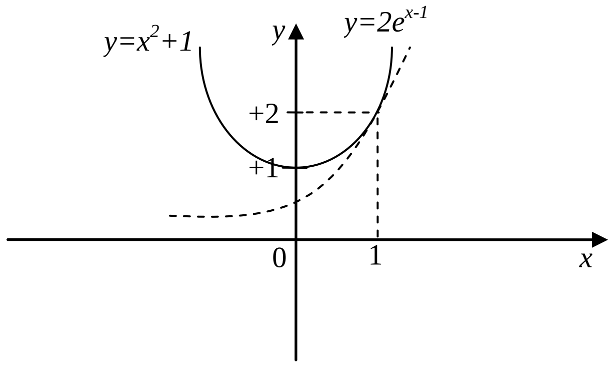
екі 1-ретті дифференциалдық теңдеу шығады.

$$y = x^2 + c_1$$

$$y = c_2 e^x$$

жалпы шешулері болатыны белгілі, мұнда c_1, c_2 кез келген тұрақтылар. Егер $c_1 = 1, c_2 = 2e^{-1}$ алсақ, ол әртүрлі топқа жататын екі интегралдық қисықтар бөлігінің жиынтығы болар еді. Мәселен,

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ 2e^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$



7-сызба

2) Айталық, (1) теңдеу y арқылы айқындалған болсын, онда төмендегі теңдеулер жиынтығы шығады:

$$\begin{aligned} &y = g_1(x, y') \\ &y = g_2(x, y') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y = g_m(x, y') \end{aligned} \qquad (4)$$

мұнда $m \le \infty$

Бұл теңдеулер бұрын қарастырылмаған, сондықтан оларды шешуге басқа әдістер қолдану қажет.

2. Туындысы арқылы айқындалмаған 1-ретті дифференциалдық теңдеулер шешу әдісі

(4) арасынан жеке

$$y = g(x, y') \qquad (5)$$

теңдеуін қарастырайық. Қарастырылып отырған облыста g-дың өз аргументтері бойынша дербес туындылары бар деп жориық.

Параметр енгізу әдісінің идеясы: Бұдан бұрын жай дифференциалдық теңдеулердің шешімін немесе интегралын (x, y) декарт координатасында алған едік. Бұл әдісте шешулер мен интегралдарды параметрлік түрде алатын боламыз, мәселен:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(p, c) \\ y &= \varphi(p, c) \end{aligned} \qquad (6)$$

мұнда p параметр, c жалпы шешу құрамында болатын кез келген тұрақты.

Ескерту: Математикалық анализ курсында параметрлік түрде берілген функцияда, оның параметрлерін әдетте t арқылы таңбалап едік, ал жай дифференциалдық теңдеулер теориясында параметр p арқылы таңбаланады. (5) параметр енгізу әдісін жүзеге асыру төмендегіше болады:

Айталық $p = y'$ болсын, онда (5)-тен

$$y = g(x, p)$$

шығады.

Осының екі жағынан дифференциал алып, $dy = y'dx$ қатынасын қолдансақ

$$pdx = g'_x(x, p)dx + g'_p(x, p)dp$$

немесе

$$\left(p - g'_x(x, p)\right)dx = g'_p(x, p)dp \tag{7}$$

шығады. Айталық (7) теңдеудің (ол айнымалылары бөлектенген, біртекті т. б. теңдеулер болуы мүмкін) жалпы шешуін таптық дейік, ол $x = \varphi(p, c)$, с кез келген тұрақты.

Егер осыны (6)-ға қойсақ, (5) теңдеудің (6) параметрлік түрдегі шешуін табамыз:

$$x = \varphi(p, c)$$
$$y = g[\varphi(p, c), p]$$

мұнда

$$\varphi(p, c) = g[\varphi(p, c), p]$$

Мысал: Егер (6)-да p параметрді шығарып тастауға болса, онда декарт координатасында теңдеудің жалпы шешуін алған болар едік.

Мысалы:

$$y - xy' + x^2 y'^3 = 0 \tag{8}$$

берілген.

$y = xy' - x^2 y'^3$ теңдеуіне параметр енгізу әдісін қолданамыз. $p = y'$ болсын, онда

$$y = xp - x^2 p^2 \tag{9}$$

осыдан толық дифференциал алсақ

$$pdx = pdx - 2xp^3 dx + xdp - 3x^2 p^2 dp$$ шығады.

$$2xp^3 dx = x(1 - 3xp^2)dp$$

1. Егер $x = 0$ болса, онда (9)-дан бір шешімі $y \equiv 0$ шығады.
2. Егер $x \neq 0$ болса, онда $2p^3 dx = \left(1 - 3xp^2\right)dp$

немесе $x'_p = -\dfrac{3}{2p}x + \dfrac{1}{2p2p^3}(p \neq 0)$ сызықтық теңдеу. Теңдеуді шешіп, оның жалпы шешуі $x = \varphi(p, c)$ табамыз. Осыны (9)-ға қойып берілген теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешуін табамыз.

Ескерту: (1) теңдеуде x арқылы анықталған түрлерін қарастырайық:

$$\begin{aligned} &x = h_1(y, y') \\ &x = h_2(y, y') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x = h_m(y, y') \end{aligned} \qquad (10)$$

кез келген m үшін бұған мысал келтіру қиын емес. (10)-ның әрқайсысын интегралдау мәселесі де параметр енгізу әдісімен шешіледі. Мәселен,

$$x = h(y, y') \qquad (11)$$

Мұнда h-тың бірінші ретті дербес туындылары болуы қажет. Бұрынғыдай, $p = y'$ алайық, онда

$$x = h(y, p) \qquad (12)$$

Егер y-тің параметрлік түрдегі берілуін тапсақ, оны (12) қойып, x-тің де параметрлік түрдегі берілуін табар едік. y және p айнымалыларына байланысты дифференциалдық теңдеу алу үшін (12)-нің екі жағынан дифференциал аламыз:

$$dx = h'_y(y, p)dy + h'_p(y, p)dp$$

Екі жағын p-ға көбейтіп және $dy = y'dx = pdx$ қатынасын еске алсақ, мынау шығады:

$$\begin{aligned} &dy = ph'_y dy + ph'_p dp \\ &(1 - ph'_p)dy = ph'_p dp \end{aligned} \qquad (13)$$

Бұл теңдеу y және p айнымалыларының дифференциалдық теңдеуі. Айталық, (13) шешуі $y = \phi(p, c)$ болсын дейік. Онда осыны (12)-ге қойсақ, теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешуін алған болар едік:

$$\begin{aligned} &x = h(y, p) = h[\phi(p, c), p] \\ &y = \phi(p, c) \end{aligned}$$

Егер (1) теңдеу y арқылы айқындалатын болса, мәселен $y = g(x, y')$ немесе

$$y = x\varphi(y') + \phi(y'), \qquad (14)$$

онда ол Лагранж теңдеуі деп аталады. (14) теңдеудің $\varphi(y') = y'$ болғандағы дербес түрі Клеро теңдеуі деп аталады, ол:

$$y = xy' + \phi(y') \qquad (15)$$

2. Лагранж теңдеуін интегралдау

$y = x\varphi(y') + \phi(y')$ (14) Лагранж теңдеуін алайық. $y' = p$ деп алып және $dy = y'dx$ қатынасын пайдалансақ (14) теңдеуге эквивалент болатын жүйе аламыз:

$$\begin{cases} y = \varphi(p)x + \phi(p) \\ dy = pdx \end{cases} \qquad (16)$$

мұнда $\varphi(p)$ және $\phi(p)$ $\forall \mathrm{p} \in \mathrm{R}'_{\mathrm{p}}$ декарттық координаты бойынша берілген үзіліссіз дифференциалданатын функциялар. (15)-тің 1 теңдеуінен дифференциал алайық

$dy = \varphi'(p)dp + \varphi(p)dx + \phi'(p)dp$ сонда

$\varphi'(p)dp + \varphi(p)dx + \phi'(p)dp = pdx$ немесе

$[\varphi'(p)x + \phi'(p)]dp = [p - \varphi(p)]dx$ бұдан

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\phi'(p)}{p - \varphi(p)} \qquad (17)$$

x-ке байланысты 1-ретті сызықтық теңдеу шығады. (17) сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы жөніндегі теорема бойынша, оның жалпы шешімі:

$$x = \alpha(p) + C\beta(p) \qquad (18)$$

мұнда $\alpha(p)$ бір дербес шешімі, ал $C\beta(p)$ (17)-ге сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешуі . Сондықтан

$$\begin{aligned} x &= \alpha(p) + Ce^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}dp} \\ y &= \varphi(p)\left[\alpha(p) + Ce^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}dp}\right] + \phi(p) \end{aligned} \qquad (19)$$

Бұл параметрлік түрдегі жалпы шешімі, одан параметр p–ны шығарып тастап $\phi(x, y, c) = 0$ түрдегі жалпы шешуін аламыз.

Мысал : $y = xy'^2 + y'^2 \quad y' = p$

$$y = xp^2 + p^2$$

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$p - p^2 = (2xp + 2p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow 1 - p = 2(x + 1)\frac{dp}{dx}$$

$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p - 1}x = \frac{2}{1 - p}$ сызықтық теңдеу

жалпы шешуі $x = \frac{c}{(p - 1)^2} - 1$; ал параметрлік түрдегі шешімі:

$$x = \frac{c}{(p-1)^2} - 1;$$

$$y = \left[\frac{c}{(p-1)^2} - 1 \right] p^2 + p^2 = \frac{cp^2}{(p-1)^2};$$

p-ны шығарып тастасақ $y = \left(\sqrt{x+1} + c \right)^2$ жалпы шешімі шығады.

3. *Лагранж, Клеро теңдеулерін интегралдау, бір-бірінен айырмашылықтары. Ерекше шешімдері.*

$\varphi(y') = y'$ болғандағы (14) теңдеудің дербес түрі

$$y = xy' + \phi(y') \tag{20}$$

Клеро теңдеуі деп аталады. $y' = p$ деп алсақ,

$$y = xp + \phi(p) \tag{21}$$

Екі жағынан дифференциал алып, $dy = y'dx = pdx$ қатынасты еске алсақ:

$$pdx = pdx + xdp + \phi'(p)dp \text{ немесе } \quad [x + \phi'(p)]dp = 0$$

$dp = 0;$ $p = c$ онда

$$y = Cx + \phi(c) \tag{22}$$

жалпы интегралы

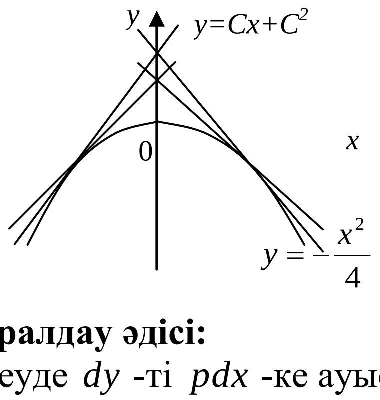
$$x + \varphi'(p) = 0; \;\; x + \varphi'(c) = 0; \tag{23}$$

$$\begin{cases} y = Cx + \phi(c) \\ x = -\phi'(c) \end{cases} \tag{24}$$

Осыдан c-ны шығарып тастасақ $R(x, y) = 0$ шешуін аламыз, әдетте бұл ерекше шешу болады.

Мысал: $y = xy' + y'^2$ жалпы интегралы $\begin{matrix} y = Cx + c^2 \\ x = -2C \end{matrix}$

Бұдан $y = -\dfrac{x^2}{4}$ шығады, яғни жалпы интегралы түзу сызықтар $y = -\dfrac{x^2}{4}$ параболаға жүргізілген жанамалар үйірі болады.



Лагранж теңдеуін интегралдау әдісі:

1. $y' = p$ алып, (14) теңдеуде dy-ті pdx-ке ауыстырамыз.

2. Алынған x қатысты сызықтық теңдеуінің шешімін табамыз, яғни $x = r(p,C)$ түрінде болады, мұнда r - кез келген функция.

3. Бастапқы теңдеудің шешімін параметр түрінде жазамыз:

$$\begin{cases} x = r(p,C), \\ y = r(p,C)\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Мысал. Теңдеуді интегралдау керек

$$y = 2xy' + \ln y'.$$

Шешуі. $y' = p$ қоямыз, онда $y = 2xp + \ln p$. Екі жағын дифференциалдап,

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{dp}{p}$$

аламыз, бұдан

$$p\frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p} \text{ немесе } \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}.$$

Бірінші ретті x –қа қатысты сызықты теңдеу алдық, оны 3-тақырыптағы үлгіге қарап шығарамыз,

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Табылған x-тің мәнін қойып,

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p},\ y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2$$

берілген Лагранж теңдеуінің шешімін алдық.

Анықтама. Клеро теңдеуі

$$y = xy' + \psi(y')$$

түрінде болады.

Шешу әдісі. Клеро теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = Cx + \psi(C)$$

түрінде болады. Клеро теңдеуінің жалпы шешімі параметрлік түрде $x = -\psi'\ (p)$

$$y = -\psi'(p)p + \psi(p)$$

болады.

Лагранж және Клеро теңдеулерін де параметр әдісі арқылы шешеміз.

Мысал. Теңдеуді интегралдау керек

$$y = xy' + \frac{1}{2y'}.$$

Шешуі. $y' = p$ қоямыз, онда $y = xp + \dfrac{1}{2p}$ аламыз. Теңдеуді дифференциалдап, dy-ті pdx-ке ауыстырып,

$$pdx = pdx + xdp - \frac{1}{2p^2}dp,$$

бұдан

$$dp\left(x-\frac{1}{2p^2}\right)=0$$

аламыз.

Бірінші көбейткішті нөлге теңестіріп, $dp=0$, бұдан $p=C$ аламыз және берілген теңдеудің жалпы шешімі $y=Cx+\frac{1}{2C}$ болады, бір параметрден тәуелді түзулер үйірі. Екінші көбейткішті нөлге теңестіре отырып,

$$x=\frac{1}{2p^2}$$

аламыз. Осы теңдеуден және $y=Cx+\frac{1}{2C}$-ден p-дан құтылып, $y^2=2x$ теңдеудің шешімін аламыз (ерекше шешім).

Геометриялық тұрғыдан $y^2=2x$ иілгіш түзулер үйірінің қисығы.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.