5 дәріс

Дәріс тақырыбы: **Коши есебі шешуінің бар болуымен жалғыздығы жөніндегі мәселелер**

Жоспар

1. Эйлер сынық сызығы.
2. Пеано теоремасында $f(x, y)$ функциясына қойылатын шарттар.
3. Пикар теоремасында $f(x, y)$ функциясына қойылатын шарттар.

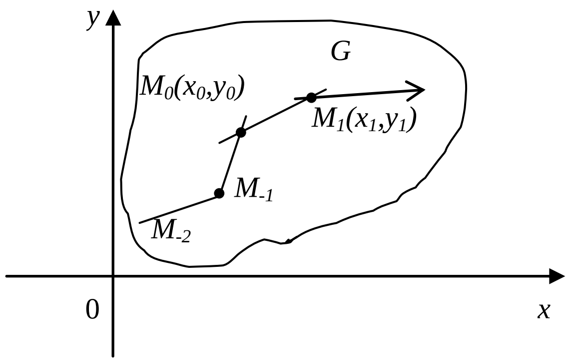
1. Эйлер сынық сызығы

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

теңдеуі берілсін және оң жағы G аймағында анықталған және үзіліссіз болсын. Онда (1) теңдеу (x, y) жазықтығында бір өрістер бағытын беретіні белгілі, оған қоса оң жағы үзіліссіз болғандықтан өрістер бағыты да үзіліссіз, сондықтан кез келген өзара жақын екі нүктедегі бағыттар бір-бірінен азғана айырмасы болады.

(1) теңдеудің оң жағы үзіліссіз болғандықтан, оның шешуіде үзіліссіз дифференциалданатын функция, сол себептен интегралдық қисығыда тегіс (үзілген жері жоқ) болуы керек.

Кез келген интегралдық қисықтың әр нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың бағыты өріс бағытымен бірдей болатын қасиетті пайдаланып (изоклина әдісі, 1-қараңыз) G аймағында бастапқы берілген x_0, y_0 сәйкес Коши есебінің шешуін табайық.



5-сызба

Ол үшін G аймағында $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы түзу кесіндісін жүргізейік, оның бұрыштық коэффициенті $f_0(x_0, y_0) = k_0$ болатыны белгілі. Осы түзудің кез келген $M_1(x_1, y_1)$ нүктесінің көлбеуі $f(x_1, y_1)$-ге тең түзу жүргізейік т.с.с.(5-сызба). Осындай түзулерді $x = x_0$ нүктесінен солға қарайда жүргізуге болады. Сонымен G аймағында белгілі бір сынық сызық пайда болады. Осы сынық сызықты Эйлер сынығы деп атайды да. Қолданылған әдісті Эйлер әдісі дейді. G аймағының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін осы сынық сызықтар (1) теңдеудің интегралдық қисықтарының кейбір бейнесін бере алады. Олай болуы сынық сызықтардың саны ∞-ке ұмтылғанда, оның әр буынының ұзындығы нольге тең болуына байланысты.

2. Пеано теоремасында $f(x,y)$ функциясына қойылатын шарттар

Егер (1) теңдеудің оң жағы $R: |x-x_0| \le a, |y - y_0| \le b$ аймағында үзіліссіз және $M = \max\limits_{G} |f(x,y)|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ болса, онда (1) теңдеудің $|x-x_0| \le h$ аралығында $\varphi(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандырарын ең жоқ дегенде бір $y = \varphi(x)$ шешуі бар болады.

(мұнда $|x-x_0| \le h$ аралығы Пеано кесіндісі деп аталады).

1) жағдайда айтылғандарға байланысты $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы кез келген бағытпен шексіз көп сынық сызықтар жүргізуге болатыны белгілі, ал оның әр қайсысы әр түрлі интегралдық қисықтың бейнесін берер еді.

Осы сияқты Пеано теоремасыда Коши есебі шешуінің тек қана бар болуын қамтамасыз етеді, оның жалғыз болатындығын қамтамасыз ете алмайды.

Енді Коши есебі шешуінің бар болуымен қоса, жалғыздығында қамтамасыз ететін теореманы қарастырайық.

3. Пикар теоремасында $f(x,y)$ функциясына қойылатын шарттар

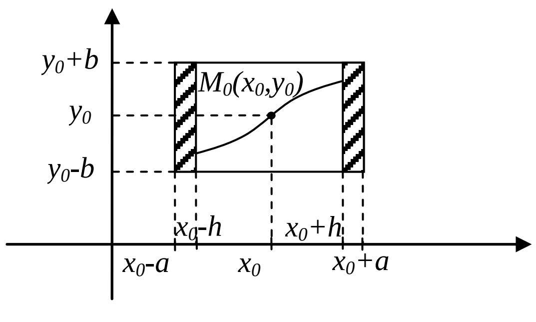
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

теңдеу және (x_0, y_0) бастапқы мәндер берілсін, яғни $y(x_0) = y_0$;

$f(x,y)$ функциясына төмендегідей шарттар қойылсын:

1^0 $f(x,y)$-екі айнымалының тұйық G аймағында үзіліссіз функциясы, ал $R: |x-x_0| \le a, |y - y_0| \le b$; мұнда a,b кез келген сандар, $f(x,y)$ функциясы R аймағында үзіліссіз болғандықтан осы аймақта шенелген функция, сондықтан төменгі теңсіздікті қанағаттандыратын бір $M > 0$ саны табылады,

$$|f(x,y)| \le M \tag{2}$$



6-сызба

2^0 $f(x,y)$ функциясының мына төмендегі y бойынша шенелген дербес туындысы бар, яғни

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N \tag{3}$$

мұнда N –тұрақты оң сан, ал $(x,y)\in R$. Бұл шартты Липшиц шартымен ауыстыруға болады, яғни $\forall x \in |x-x_0| \le a$ үшін

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le N|y_1-y_2| \tag{4}$$

мұнда y_1, y_2 у айнымалысының кез келген екі мәні, ал N-кез келген оң тұрақты сан. Осылайша жорығанда (1) теңдеудің $|x-x_0| \le h$ (Пеано кесіндісі) аралығында x-тің барлық мәндері үшін анықталған және үзіліссіз $y=\varphi(x)$ жалғыз ғана шешуі бар болады, мұнда $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$

1^0. Алдымен (1) теңдеу шешуінің бар болуын дәлелдейік.

(Біртіндеп жуықтау әдісін қолданып Пикар дәлелдеген). Бастапқы шарты берілген (1) дифференциалдық теңдеуді оған балама мына интегралдық теңдеумен ауыстырайық

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \tag{5}$$

Бұл интегралдық теңдеу бастапқы шартты қанағаттандырады, себебі $y\big|_{x=x_0} = y_0$

Біртіндеп жуықтау әдісін қолданудың мәнісі мынада: (5) интегралдық теңдеуді біртіндеп жуықтау әдісімен шешеміз, яғни $f(x,y)$ функциясына біртіндеп $y_0, y_1, y_2,...,y_{n-1}$ функциясының мәндерін қою арқылы (5) теңдеудің сол жағындағы y-тің мәнін табамыз, мұнда

$$y_0, y_1, y_2,...,y_{n-1}, y_n, y_{n+1},... \tag{6}$$

тізбегінің R аймағынан шықпауын қамтамасыз ету қажет. Алдымен бірінші жуықтауды қарастырайық

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx \tag{7}$$

$(x,y)\in R$ болу үшін x-тің өзгеруін $|x-x_0| \le h$ интервалымен шектеу керек, мұнда $h \le a$ немесе $h \le \dfrac{b}{M}$ деп алынады, ал $|f(x,y)| \le M$ екені белгілі.

Онда

$$|y_1 - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(x,y)|dx \le M|x-x_0| \le M\,h < b \tag{8}$$

Бұл y_1-дің R аймағының шекарасынан шықпайтынын көрсетеді. Екінші жуықтау

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \tag{9}$$

(6), (8) жуықтаулардың екеуіде бастапқы шарттарды қанағаттандырады, себебі $x = x_0$ болғанда $\begin{matrix}(8) \Rightarrow y_1 = y_0 \\ (9) \Rightarrow y_2 = y_0\end{matrix}$

айырманы бағалайық.

$$|y_2 - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1)|dx \le M|x - x_0| \le M\ h < b \tag{10}$$

y_2 - де R аймағының шекарасынан шығып кетпейді т.с.с. Енді жалпы формула құрайық

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \tag{11}$$

айырманы бағалайық

$$|y_n - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1})|dx \le M|x - x_0| \le M\ h < b \tag{12}$$

Барлық алғашқы жуықтаулар сияқты y_n-де R аймағының шекарасынан шығып кетпейді. Енді $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$ табайық, осы тізбектің шекті функциясы бастапқы шартта берілген (1) теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін төмендегі формаль қатарды құрайық

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \tag{13}$$

Осы қатардың жинақылығын дәлелдеу үшін, мына төмендегі айырмаларды бағалайық:

$$|y_1 - y_0| \le M|x - x_0| \le Mh \tag{14}$$

$$|y_2 - y_1| \le \left| \int_{x_0}^{x} |\{f(x, y_1) - f(x, y_0)\}| dx \right| = \begin{pmatrix} \textit{Липшиц жазуы бойынша} \\ |f(x, y_1) - f(x, y_0)| \le N|y_1 - y_0| \end{pmatrix} =$$

$$= N\left| \int_{x_0}^{x} M|x - x_0|dx \right| = \frac{MN}{12}|x - x_0|^2 \le \frac{MN}{12}h^2 = \frac{MN}{2!}h^2 \tag{15}$$

$$|y_3 - y_2| \le N\int_{x_0}^{x} M|y_2 - y_1|dx \le \frac{MN}{12}\frac{|x - x_0|^3}{3} \le \frac{MN^2}{3!}h^3 \tag{16}$$

. . . .

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{MN^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \le \frac{MN^{n-1}}{n!}h^n \tag{17}$$

Сонымен, (12) қатардың орнына мына қатарды қарастырайық:

$$Mh + M\frac{Nh^2}{2!} + M\frac{N^2h^2}{3!} + \ldots + M\frac{N^{n-1}h^n}{n!} + \ldots \tag{18}$$

бұл жинақты қатар, себебі Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{MN^n h^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{MN^{n-1}h^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{Nh}{n+1}=0$$

(17) қатардың сәйкес әрбір мүшесі (12) қатар мүшелерінен үлкен болғандықтан (екінші мүшесінен бастап) (12) қатарда жинақты, олай болса

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y(x) \tag{19}$$

бұл (6) тізбектің шекті функциясы және ол $|x-x_0|\le h$ аралығында үзіліссіз. Бұған қоса $y(x)$ функциясы (5) интегралдық теңдеуді қанағаттандырады, яғни

$$Y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,Y)dx \tag{20}$$

(20) ны x бойынша дифференциалдасақ

$$\frac{dY}{dx}=f(x,Y) \tag{21}$$

Сондықтан (1) теңдеудің бастапқы шартты қанағаттандыратын шешуі бар.

2^0. Енді осы шешімнің жалғыздығын дәлелдейік. $|x-x_0|\le h$ интервалында (Пеано кесіндісі) (1) теңдеудің y_1 және y_2 екі шешімі болсын дейік, бұл шешімдер $x=x_0$ нүктесінде бірдей, ал басқа нүктелерде әртүрлі, сондықтан $y_1-y_2\ne 0$

Айталық $\xi\ne x_0$ нүктесінде бұл айырма ең үлкен $\theta>0$ мәнін қабылдайтын болсын, $|y_1-y_2|=\theta>0$ $|y_1-y_2|$ айырманы бағалайық

$$|y_1-y_2|\le\int_{x_0}^{\xi}|f(x,Y_1)-f(x,Y_2)|dx\le N\int_{x_0}^{\xi}|y_1-y_2|dx$$

$\theta\le N\theta\varepsilon,$ мұнда $\left|\int_{x_0}^{\xi}dx\right|\le\varepsilon$ $\theta\ne 0$ жағдайда $1\le N\varepsilon$ қарама-қайшы теңсіздік аламыз, себебі ε-ді өте аз шама ретінде таңдап алуға болады, мәселен $\varepsilon<\dfrac{1}{N}$ десек, $1<1$ шығады. Сөйтіп, $|x-x_0|\le h$ интервалында тең емес екі шешім бар деп жоруымыз қайшылыққа әкеп соғады, сондықтан теңдеудің жалғыз ғана шешімі бар.

Сонымен Пикар теоремасы Коши есебі шешімінің бар болуын ғана емес, сонымен бірге жалғыздығын да қамтамасыз етеді.

Мысал: $y'=x-y^2$ теңдеуі үшін $y(0)=0$ шарты бойынша $|x|\le 1, |y|\le 1$ квадрат аймақта Коши есебінің шешуін біртіндеп жуықтау әдісін қолданып 3-жуықтауын табыңыздар? Коши есебінің дәл шешімімен осы жуықтау арасындағы қатесін табыңдар?

Берілген теңдеудің оң жағы $f(x,y)=x-y^2$ y бойынша үзіліссіз дифференциалданады және оның y бойынша дербес туындысы бар, яғни $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-2y$

Сондықтан $f(x,y)$ Липшиц шартын қанағаттандырады, ал

$$N=\max_{\substack{|x|\le 1\\ |y|\le 1}}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=2$$

$$M=\max_{\substack{|x|\le 1\\ |y|\le 1}}|f(x,y)|=\max_{\substack{|x|\le 1\\ |y|\le 1}}\left|x-y^2\right|=2,$$

ал $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)=\min\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. Демек, Пикар кесіндісі $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$; жуықтауларды

$$y_{n+1}(x)=\int_0^x\left(s-y_n^2(s)\right)ds,\quad \mathrm{n}=0,1,2,....$$

формуласымен есептейміз.

1-жуықтау: $y_1(x)=\int_0^x(s-0)ds=\dfrac{x^2}{2}$

2-жуықтау: $y_2(x)=\int_0^x(s-\dfrac{s^4}{4})ds=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{20}$

3-жуықтау: $y_3(x)=\int_0^x\left[s-\left(\dfrac{s^2}{2}-\dfrac{s^5}{20}\right)\right]ds=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{20}+\dfrac{x^8}{160}-\dfrac{x^{11}}{4400}$

осы жуықтаумен теңдеудің дәл шешімі арасындағы айырмасы

$$|y(x)-y_3(x)|\le\frac{MN^2}{3!}h^2=\frac{2\cdot 2^2}{6}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{1}{6}$$

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982

9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.

10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.