4 дәріс

Дәріс тақырыбы: **Толық дифференциалды теңдеулер. Интегралдаушы көбейткіш**

Жоспар.

1. Толық дифференциалды теңдеу. Теңдеудің симметриялық түрі, толық дифференциалды болу үшін орындалатын қажетті және жеткілікті шарт. Толық дифференциалды теңдеуді интегралдау әдісі.
2. Интегралдаушы көбейткіш. Интегралдаушы көбейткіштерді табудың кейбір әдістері.
3. Интегралдаушы көбейткіш және ерекше шешім.
4. Интегралдық көбейткіштің бар болуы жөніндегі теорема

1. *Толық дифференциалды теңдеу. Теңдеудің симметриялық түрі, толық дифференциалды болу үшін орындалатын қажетті және жеткілікті шарт. Толық дифференциалды теңдеуді интегралдау әдісі.*

Анықтама. Егер

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{35}$$

1-ретті симметриялық түрдегі теңдеудің сол жағы үзіліссіз дифференциалданатын $F(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болса, онда оны толық дифференциалды теңдеу деп атайды.

Мұнда $M(x,y), N(x,y)$ және олардың дербес туындылары $\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y}$ G - облысында үзіліссіз, оған қоса G облысында ешқандай ерекше нүкте болмауы қажет.

Анықтама бойынша

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{36}$$

$$dF(x,y) = 0, \quad \mathrm{F(x,y) = C, C = const} \tag{37}$$

жалпы интеграл.

Мысал: $xdx + ydy = 0; \quad \mathrm{F(x,y)} = \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

Жалпы интегралы $x^2 + y^2 = c_1^2 \; (2c = c_1^2)$

1^0. Жалпы интегралды табу

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy \tag{37}$$

болатыны матанализден белгілі.

(36) және (37)-ні салыстырсақ; G облысында

$$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}; \qquad \mathrm{N(x,y)} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \tag{38}$$

онда $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ осыдан

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \tag{39}$$

барлық $(x,y)\in G$ үшін математикалық анализ курсында қисықсызықты интеграл тарауында, егер G бір байланысты аймақ болса, онда (35) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болуының жеткілікті шарты (39) болатыны дәлелденген. Бір байланысты аймаққа жазықтық, дөңгелек, төртбұрыш жатады, ал дөңгелек сақина жатпайды.

$F(x,y)$ функциясын табу үшін (38) алайықта, оның 1-теңдеудегі y-ті тұрақты шама деп қарастырайық, сонда

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\varphi(y) \tag{40}$$

Осыдан (38)-дің 2-теңдігі бойынша

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\varphi(y)\right]=N(x,y) \tag{41}$$

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$\varphi'(y)=N(x_0,y);\qquad \varphi(\mathrm{y})=\int_{\mathrm{y}_0}^{y} N(x_0,y)dy \tag{42}$$

$$F(x,y)=\int_{\mathrm{x}_0}^{x} M(x\ ,y_0)dx+\int_{\mathrm{y}_0}^{y} N(x_0,y)dy=C$$

жалпы интеграл немесе жалпы шешуі.

1. Мысал: $2x\cos y dx+(y^2-x^2\sin y)dy=0$

$$\frac{\partial(2x\cos y)}{\partial x}=\frac{\partial(y^2-x^2\sin y)}{\partial y}=-2x\sin y$$

демек, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу. Сондықтан,

$$F(x,y)=2\int x\cos y dx+c=2\cos y\int x dx+\varphi(y)=x^2\cos y+\varphi(y)$$

$$\left[x^2\cos y+\varphi(y)\right]'_y=y^2-x^2\sin y;$$

$$-x^2\sin y+\varphi'(y)=y^2-x^2\sin y;\qquad \varphi'(\mathrm{y})=\mathrm{y}^2$$

$$\varphi(y)=\frac{y^3}{3}+c_1;\ F(x,y)=x^2\cos y+\frac{y^3}{3}=C;\quad \mathrm{x}^2\cos y+\frac{y^3}{3}=C$$

жалпы шешімі.

2. Мысал. Дифференциалдық теңдеуді шешу керек:

$$(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0.$$

Шешуі. Мұнда $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2xy$, онда берілген теңдеу толық дифференциалдық теңдеу.

$$u(x,y)=\int(x^3+xy^2)dx+C(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+C(y),$$

$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$ пайдаланып, $x^2y+C'(y)=x^2y+y^3$ аламыз. Бұдан

$$C'(y)=y^3\Rightarrow C(y)=\frac{y^4}{4}.$$

$u(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}$ немесе $x^4+2x^2y^2+y^4=C$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2. *Интегралдаушы көбейткіш. Интегралдаушы көбейткіштерді табудың кейбір әдістері.*

$$M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy=0 \qquad (43)$$

толық дифференциалды теңдеу болмасын дейік.

Анықтама. Егер (43) теңдеудің екі жағын $\mu=\mu(x,y)$ көбейткенде, ол толық дифференциалды теңдеу болса, онда оны интегралдаушы көбейткіш деп атайды. Анықтамаға сәйкес

$$\mu M_1dx+\mu N_1dy=0 \qquad (44)$$

толық дифференциалды теңдеу. Сондықтан

$$\frac{\partial(\mu M_1)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N_1)}{\partial x} \qquad (45)$$

(жеткілікті шарты)

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mu}{\partial y}M_1+\mu\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N_1+\frac{\partial N_1}{\partial x}\mu\\ \mu\left(\frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)=\frac{\partial\mu}{\partial x}N_1-\frac{\partial\mu}{\partial y}M_1\end{gathered} \qquad (46)$$

бұл 1-ретті дербес туындылы теңдеу.

Интегралдаушы көбейткішті табу үшін мына жағдайларды қарастырайық.

1) $\mu=\mu(x)$, бір ғана x-тің функциясы болсын, онда (46) – дан $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1}$ немесе интегралдағаннан кейін

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1}dx} \qquad (47)$$

Мысал: $\left(x^2 - \sin^2 y\right)dx + x\sin 2y dy = 0$

$M_1 = x^2 - \sin^2 y; \qquad N_1 = x\sin 2x$

$\frac{\partial\left(x^2 - \sin^2 y\right)}{\partial y} \neq \frac{\partial\left(x\sin 2x\right)}{\partial x}$ сондықтан берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу емес, интегралдаушы көбейткішті табу керек. Ол үшін (47)-де интеграл астындағы фунуцияны есептеу қажет.

$$\frac{\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1} = \frac{-2\sin y\cos y - \sin 2y}{x\sin 2y} = \frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = -\frac{2}{x};$$

$$\mu(x) = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

демек $\frac{1}{x^2}(x^2 - \sin^2 y)dx + \frac{1}{x}\sin 2y dy = 0$ немесе

$$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{\sin 2y}{x}dy = 0$$

толық дифференциалды теңдеу.

2) $\mu = \mu(y)$ болсын. Бұл жағдайды өз-беттеріңізбен қорытып шығарыңыздар.

Нұсқау: (46) теңдеуді қарастыру қажет.

3) $\mu = \mu[\omega(x, y)]$ екі айнымалының функциясы болсын. Онда (46) былай жазылады:

$$\mu(\omega)\left(\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}\right) = N_1\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} - M_1\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1\frac{\partial\omega}{\partial x} - M_1\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \phi(\omega)$$

$$\ln\mu(\omega) = \int\phi(\omega)d\omega; \qquad \mu(\omega) = e^{\int\phi(\omega)d\omega} = \varphi[\omega(x, y)]$$

а) егер $\omega = xy$ болса, онда

$$\phi(x, y) = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1 y - M_1 x}$$

б) егер $\omega = x + y$ болса, онда

$$\phi(x + y) = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1 - M_1}$$

Мысал: $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1+e^{-x}y}=0;\ dx+(1+e^{-x}y)dy=0;\ M_1=1;\ \mathrm{N}_1=1+e^{-x}y$

$\mu=\mu(x+y)$ түрінде іздейік, демек $\omega=x+y$

$$\mu(\omega)e^{\int\phi(\omega)d\omega};\quad \phi(\mathrm{x}+\mathrm{y})=\frac{0+e^{-x}y}{1+e^{-x}y-1}=1;$$

$$\mu(x+y)=e^{\int d(x+y)}=e^{x+y};\ e^{x+y}dx+\left(e^{x+y}+e^{y}y\right)dy=0$$

толық дифференциалды теңдеу.

3. Интегралдаушы көбейткіш және ерекше шешім

(43) толық дифференциалды емес теңдеуді алайық. $\mu=\mu(x,y)$ Интегралдаушы көбейткіш болсын. Онда

$$\mu(x,y)[M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy]=dF(x,y)=0 \tag{48}$$

бұдан $M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy=\frac{1}{\mu(x,y)}dF(x,y)=0$

а) $dF(x,y)=0\quad \mathrm{F(x,y)=C}$ жалпы интеграл

в) $\frac{1}{\mu(x,y)}=0\Rightarrow\mu(x,y)\to\infty$

бұдан мынадай қорытынды жасауға болады. Ерекше шешім интегралдаушы көбейткіштер ∞-ке айналатын нүктелерде болады.

4.Интегралдық көбейткіштің бар болуы жөніндегі теорема

Егер G аймағында (43) теңдеудің жалпы интегралы $u(x,y)=c$ болып және $u(x,y)$ интегралының осы аймақта 2-ретті дербес туындылары бар болса, онда (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші бар болады.

Дәлелдеу: $u(x,y)=c$ жалпы интеграл болғандықтан $du(x,y)=0$. Демек,

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0 \tag{49}$$

dx және dy шамалары

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0\\ M_1dx+N_1dy=0\end{gathered} \tag{50}$$

жүйені қанағаттандырады. (50) біртекті жүйенің нольге тең емес шешуі бар, сондықтан

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ M_1 & N_1\end{vmatrix}=0$$

немесе $\frac{\partial u}{\partial x}N_1 - \frac{\partial u}{\partial y}M_1 = 0$ бұдан

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N_1} = \mu(x,y) \qquad (51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M_1; \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = \mu N_1 \qquad (52)$$

(52)-ні (49)-ға қойсақ

$$\mu M_1 dx + \mu N_1 dy = \mu(M_1 dx + N_1 dy) = du(x,y) \qquad (53)$$

мұндағы $\mu(x,y)$ интегралдаушы көбейткіш.

Теорема: Егер $\mu(x,y)$ (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші болып, ал $F(x,y)$ оған сәйкес интегралы болса, онда үзіліссіз туындылары бар

$$\mu_1 = \mu\varphi(u) \ (\varphi(\mathrm{u}) \neq 0) \qquad (54)$$

(43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші болады.

Дәлелдеу: (43) теңдеудің екі жағын (54)-ке көбейтсек

$$\begin{aligned}&\mu\varphi(u)(M_1 dx + N_1 dy) = \varphi(u)(\mu M_1 dx + \mu N_1 dy) = \varphi(u)du = \\ &= d\int \varphi(u)du = 0\end{aligned} \qquad (55)$$

(43) теңдеудің сол жағы $\int \varphi(u)du$ функциясының толық дифференциалы, сондықтан (54) формуладан анықталған μ_1-де (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші.

Қорытынды: 1) Кез келген интегралдаушы көбейткіш (54) формула арқылы табылады.

2) интегралдаушы көбейткіш жалғыз ғана емес, бірнешеу болуы мүмкін.

Салдар: Егер μ_1 және μ_2 (43) теңдеудің өзара тең емес интегралдаушы көбейткіштері болса, онда

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = C, \ \mathrm{C - const} \qquad (56)$$

(43) теңдеудің жалпы интегралы. (54)-ке сәйкес $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \varphi(u)$; яғни $\varphi(u) = C$ жалпы интеграл.

Мысал: $xdy - ydx = 0$ теңдеудің интегралдаушы көбейткіштері

$$\mu_1 = \frac{1}{xy}; \ \mu_2 = \frac{1}{x^2}$$

салдар бойынша

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{xy} = \frac{y}{x}$$

демек

$$\frac{y}{x} = C$$

жалпы интеграл.

Берілген айнымалылары бөлектенетін теңдеудің шешімін тауып, $\frac{y}{x} = C$ оның жалпы интегралы болатынын көрсетіңіздер.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.