3 дәріс

***Дәріс тақырыбы:* 1 -ретті сызықтық теңдеулер және оған келтірілетін теңдеулер. Риккати арнайы теңдеуі**

Жоспар

1. Сызықтық теңдеу және оның түрлері. Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері
2. Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау әдістері.
3. Біртекті емес сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы. Сызықтық біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу.
4. Сызықтық теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Оларды интегралдау үшін (сызықтық теңдеуге келтіру үшін) қолданылатын әдістер.

1. Сызықтық теңдеу және оның түрлері. Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері

Анықтама. Егер 1-ретті дифференциалдық теңдеу ізделетін белгісіз функция және оның туындысы y' бойынша сызықты болып келсе, оны **сызықтық теңдеу** деп атайды.

Мәселен, $A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$

$A(x) \neq 0$ деп алып, теңдеудің екі жағын бөлейік, сонда

$$y' + \underbrace{\frac{B(x)}{A(x)}}_{p(x)} y + \underbrace{\frac{C(x)}{A(x)}}_{q(x)} = 0$$

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

Егер $q(x) = 0$ болса, оны біртекті сызықтық, ал $q(x) \neq 0$ болса, сызықтық емес 1-ретті теңдеу деп атайды.

Алдымен біртекті сызықтық теңдеуді интегралдайық.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

Бұдан әрі (2) теңдеуді (1) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеу деп атайды, бұл айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx; \qquad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c$$

$$y = ce^{-\int p(x)dx} \qquad (3)$$

біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері

1^0. Тәуелсіз айнымалы x-ті $x=\varphi(t)$, мұнда $\varphi(t)$ (t_0, t_1) аралығында анықталған, әрі дифференциалдаланатын t-ның функциясы арқылы ауыстырғаннан (1) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді.

2^0. Іздеп отырған y функциясын сызықтық түрде

$$y=\alpha(x)z+\beta(x)$$

ауыстырғаннан (1) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді, мұнда z белгісіз x-тің жаңа функциясы, ал $\alpha(x)\neq 0$ (бұл қасиеттердің дұрыстығын өз беттеріңізбен дәлелдеңіздер).

2. Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау әдістері

(1) теңдеуді интегралдаудың негізгі үш әдісі бар:
тұрақтыны варияциалау әдісі (Лагранж әдісі), теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру (Эйлер әдісі) және Бернулли әдісі.

1^0 . Тұрақтыны вариациялау әдісі. Лагранж әдісі.

Бұл әдістің мәнісі мынада: (1) теңдеудің жалпы шешуі оған сәйкес біртекті теңдеудің (3) жалпы шешуі түрінде ізделеді, бірақ c тұрақтының орнына X –те үзіліссіз дифференциалданатын $c(x)$ функциясы алынады, яғни тұрақты шама вариацияланады.

Демек (1) теңдеудің жалпы шешуін

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{4}$$

түрінде іздейміз.

Енді $c(x)$ тің (1) теңдеуді қанағаттандыратын мәнін табуымыз қажет.

Ол үшін (4) ті x бойынша дифференциалдаймыз.

$$y'=c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{5}$$

(4) және (5)-ті (1)-ге қойсақ:

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

$$c'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \mathrm{c(x)}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c \tag{6}$$

(6)-ны (4)-ке қойып, теңдеудің жалпы шешімін табамыз, яғни

$$y=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right)e^{-\int p(x)dx} \tag{7}$$

2^0. Эйлер әдісі. Біртекті емес теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру немесе интегралдаушы көбейткіш әдісі.

(1) теңдеудің екі жағын $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ көбейтсек, сонда

$$y'e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx};\ \left(ye^{\int p(x)dx}\right)'=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

интегралдасақ $ye^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ осыдан

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right) \tag{8}$$

(1) теңдеудің жалпы шешуі.

3^0. Бернулли әдісі.

(1) теңдеудің шешуін $y = uv$ (9), мұнда $u = u(x), v = v(x)$ X анықталған, әрі дифференциалданатын функциялар түрінде іздейміз.

(9) ды x бойынша дифференциалдайық

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dy}{dx} \qquad (10)$$

(9) және (10) (1) ге қойып және $u = u(x)$ функциясын

$\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ теңдеуді қанағаттандыратындай етіп алайық, бұдан

$$u = e^{-\int p(x)dx} \qquad c = 1 \qquad (11)$$

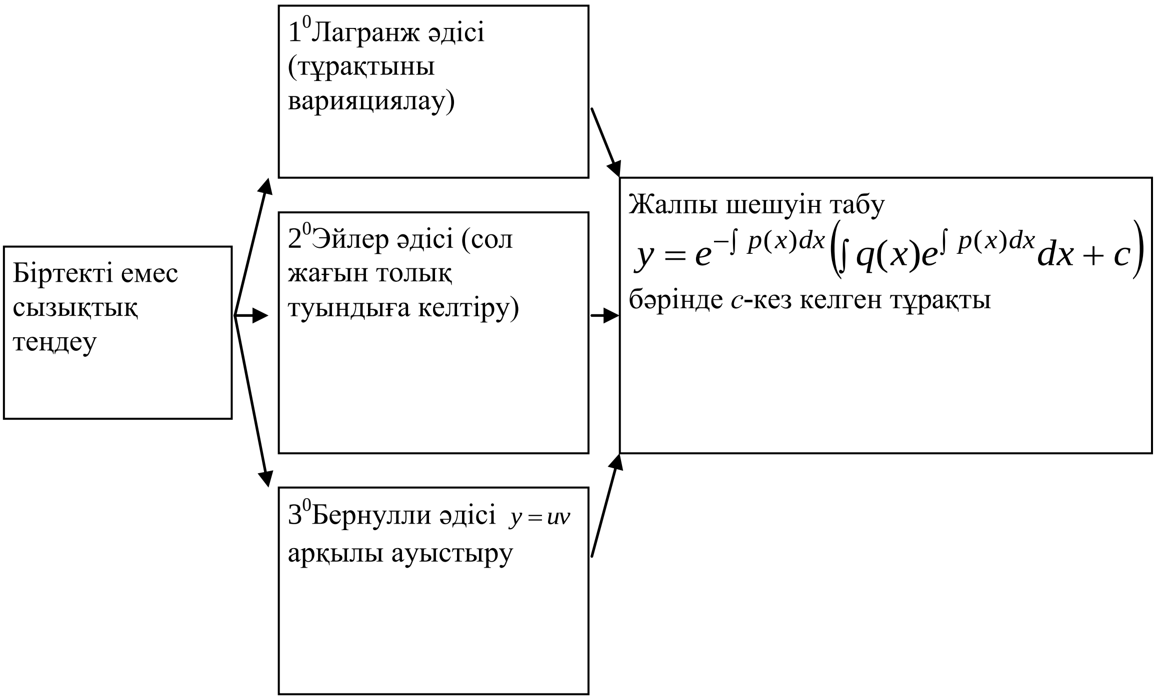
$$u\frac{dv}{dx} = q(x); \qquad e^{-\int p(x)dx}dv = q(x)dx$$

$dv = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ интегралдасақ $v = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right) \qquad (12)$$

жалпы шешу.

Схема:



3. Біртекті емес сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы. Сызықтық біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу.

Теорема: *Егер $y_1 = y_1(x)$ (1) теңдеудің бір дербес шешуі болып, ал $z = z(x)$ оған сәйкес (2) біртекті теңдеудің жалпы шешуі болса, онда (1) теңдеудің жадпы шешуі*

$$y = y_1 + z = y_1 + ce^{-\int p(x)dx} \tag{13}$$
$$x \in X, |y| < +\infty$$

формуласы арқылы өрнектеледі.

Нұсқау: Теореманы дәлелдеу үшін $y = y_1 + z$ мұнда $z = z(x)$ x-тің белгісіз жаңа функциясы, ауыстыруын x бойынша дифференциалдап, (1) теңдеуге қоямыз, содан $z = z(x)$-ті тауып қойсақ (13) шығады.

Ескерту: (7) формулада да жақшаны ашсақ:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + ce^{-\int p(x)dx} \tag{14}$$

(13) пен (14) ті салыстырсақ

$$y_1 = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{15}$$

шығады. (15) арқылы (1) теңдеудің бір дербес шешуін табамыз.

Мысалдар:

1) $y' + (tgx)y = \sec x$. Алдымен $y' + (tgx)y = 0$ біртекті теңдеуді аламыз. Бұл айнымалылары бөлектенетін теңдеу, оның жалпы шешуі:

$$y = c\cos x$$

Берілген (1) біртекті емес сызықтық теңдеудің жалпы шешуін $y = c(x)\cos x$ түрінде іздейміз, x бойынша дифференциалдап, (1) теңдеудің орнына қойсақ, $c(x) = tgx + c$ $y = (tgx + c)\cos x = \sin x + c\cos x$ жалпы шешуі.

Жоғарыдағы теоремаға сәйкес берілген теңдеудің бір дербес шешуі $y = \sin x$ болады. Осыны (15) формула бойынша тауып көрейік

$$y_1 = e^{-\int p(x)dx}\int \sec x e^{\int p(x)dx}dx = e^{\ln|\cos x|}\int \sec x e^{-\ln|\cos x|}dx =$$

$$= \cos x\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \cos x tgx = \sin x; \qquad \mathrm{y}_1 = \sin x$$

Ескерту: Егер (1) теңдеудің y_1 және y_2 дербес шешулері белгілі болса, онда

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 = q(x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2 = q(x)$$

орынды. Бұдан мүшелеп алып тастасақ, мынау шығады

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + p(y_2 - y_1) = 0$$

Демек (2) біртекті теңдеудің жалпы шешуі $y = c(y_2 - y_1)$ болар еді де, (1) біртекті емес теңдеудің жалпы шешуін теорема бойынша

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1);$$

Қорытынды: Егер теңдеудің y_1 және y_2 екі дербес шешуі белгілі болса, онда теңдеудің шешуін квадратурасыз табуға болады екен.

4. Сызықтық теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Оларды интегралдау үшін (сызықтық теңдеуге келтіру үшін) қолданылатын әдістер.

1^0. Бернулли теңдеуі

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{16}$$

мұнда n нольден, бірден басқа кез келген тұрақты сан, түріндегі теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады.

Бұл теңдеуді алғаш рет Яков Бернулли (1695ж) қолданған, ал шешуін тапқан інісі Иван Бернулли. $n = 0$ болғанда (16) теңдеу біртекті емес сызықтық теңдеу, ал $n = 1$ болғанда айнымалылары бөлектенетін теңдеу болатынын көрсету қиын емес. (16) теңдеуді интегралдау үшін, оның екі жақын $y^n (y \neq 0)$ бөлейік:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x), \tag{17}$$

мұнда теңдеудің бірінші мүшесі $p(x)$ қасындағы көбейткіштің бір тұрақты коэффицентке ғана айырмашылығы бар туындысы болып тұр. Сондықтан,

$$y^{1-n} = z \tag{18}$$

мұнда $z = z(x)$ x-тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруын қолданған қолайлы. (18) ді x бойынша дифференциалдасақ, сонда

$$(1-n)y^{-n}y' = z' \quad \Rightarrow \quad y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}z' \tag{19}$$

(18), (19)-ды (17) ге қойсақ:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x) \tag{20}$$

біртекті емес сызықтық теңдеу.

Демек, жалпы шешуі

$$z = e^{(n-1)\int p(x)dx}\left((n-1)\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$$

Егер (18) еске алсақ

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = \left[e^{(n-1)\int p(x)dx}\left((n-1)\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right)\right]^{\frac{1}{1-n}} \tag{21}$$

(16) Бернулли теңдеуінің жалпы шешуі:

Ерекше шешу: $n > 0$ болғанда теңдіктің екі жағын y^n бөлгенде $y = 0$ шешуін жоғалтуымыз мүмкін, ал $n \leq 0$ болғанда $y = 0$ теңдеудің шешуі емес. $n > 1$ болғанда $y = 0$ (21) формула бойынша $c = \infty$ болғанда шығады, ол дербес шешу, себебі $0x$ осінің нүктелері арқылы ешқандай интегралдық қисық өтпейді. Жоғарғы айтылғандарға байланысты $y=0$ $0<\mathrm{n}<1$ болғанда ғана ерекше шешу болуы мүмкін.

2^0. Дарбу теңдеуі

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy+P(x,y)(xdy-ydx)=0, \qquad (22)$$

мұнда $M(x,y)$ және $N(x,y)$ m-өлшемді біртекті, ал $P(x,y)$ l-өлшемді біртекті функциялар, түріндегі теңдеуді Дарбу теңдеуі деп аталады.

Егер $l=m-1$ болса, онда (22) теңдеу бірден біртекті теңдеу болар еді.

$y=ux$ (23), мұнда $u=u(x)$ x-тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруы арқылы (22) теңдеуді Бернулли теңдеуіне келтіруге болатындығын көрсетейік:

$$dy=udx+xdu \qquad (24)$$

$$xdy-ydx=d\left(\frac{y}{x}\right)x^2=x^2du \qquad (25)$$

Алдымен, (22) теңдеуді біртекті функциялардың қасиетіне сүйеніп мына түрде жазамыз:

$$x^m M(1,\frac{y}{x})dx+x^m N(1,\frac{y}{x})dy+x^l p(1,\frac{y}{x})(xdy-ydx)=0$$

(23), (24), (25)-ке сүйеніп былай жазуға болады:

$$x^m M(1,u)dx+x^m N(1,u)(udx+xdu)+x^l p(1,u)x^2du=0$$

x^m-ге қысқартып, dx және dy бойынша жинақтасақ

$$[M(1,u)+uN(1,u)]dx+\left[xN(1,u)+x^{l+2-m}P(1,u)\right]du=0$$

шығады. Теңдеудің екі жағын $[M(1,u)+uN(1,u)]du$ -ға бөлсек,

$$\frac{dx}{du}+\underbrace{\frac{N(1,u)}{[M(1,u)+uN(1,u)]}}_{P(u)}x=-\underbrace{\frac{P(1,u)}{[M(1,u)+uN(1,u)]}}_{q(u)}x^{l+2-m}$$

немесе

$$\frac{dx}{du}+P(u)x=q(u)x^{l+2-m} \qquad (26)$$

Бұл Бернулли теңдеуі, мұнда $x=x(u)$; $x^{m-l-1}=z$ ауыстыруы арқылы (26) теңдеуді сызықтық теңдеуге келтіреміз.

Дарбу теңдеуінің ерекше шешуі $y=ax$ $(\mathrm{x}\neq 0)$ болуы мүмкін, мұнда a $M(1,u)+uN(1,u)=0$ теңдеуінің түбірі $(u=a)$;

3^0. Риккати теңдеуі:

Анықтама. Егер $y'=f(x,y)$ теңдеуінің оң жағы y-ке байланысты квадрат үшмүшелік болса, яғни

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \qquad (27)$$

оны Риккати теңдеуі деп атайды, мұнда $p(x),q(x)$ және $r(x)$ X-те анықталған әрі үзіліссіз x-тің функциялары, коэффициенттер.

Егер $r(x)=0$ болса, онда (27) теңдеу Бернулли теңдеуі, ал $p(x)=0$ болса біртекті емес сызықтық теңдеу болар еді, сондықтан $p(x)\neq 0, r(x)\neq 0$ қарастырамыз.

Теорема: Егер (27) теңдеудің бір дербес шешімі $y_1=y_1(x)$ белгілі болса, оны Бернулли теңдеуіне келтіруге болады.

Дәлелдеу: Айталық (27) теңдеудің $y_1=y_1(x)$ шешімі белгілі болсын, онда

$$y_1'=p(x)y_1^{\,2}+q(x)y_1+r(x) \tag{28}$$

орынды.

$$y=y_1+z \tag{29}$$

$z=z(x)$ x-тің жаңа белгісіз функциясы. (29)-ды (27)-ге қойсақ

$$y_1'+z'=p(x)y_1^{\,2}+2p(x)y_1z+p(x)z^2+q(x)y_1+q(x)z+r(x)$$

(28)-ді еске алсақ,

$$z'-\left[2p(x)y_1+r(x)\right]z=p(x)z^2 \tag{30}$$

Бернулли теңдеуі шығады.

(30)-ды

$$z^{-1}=u \tag{31}$$

ауыстыруы арқылы

$$u'+\left[2p(x)y_1+r(x)\right]u=-r(x) \tag{32}$$

біртекті емес сызықтық теідеуге келтіріледі.

Практика жүзінде (29) және (31)-ді еске алсақ,

$$y=y_1+\frac{1}{u} \tag{33}$$

ауыстыруы (27) теңдеуді бірден сызықтық теңдеуге келтіреді.

Мысал: $y'=xy^2+x^2y-2x^3+1$ Рикатти теңдеуі. $y=x$ дербес шешуі бірден сызықтық теңдеуге келтіру үшін $y=x+\frac{1}{u}$ пайдаланамыз

$y'=1+\frac{1}{u^2}u'$ орнына қойсақ $u'-3x^2u=x$ біртекті емес сызықтық теңдеу шығады. Осыдан u-ды тауып, орнына қойсақ жалпы шешуі y шығады. (өз беттеріңізбен шығарыңыздар). Рикатти теңдеуі жалпы шешуінің құрылымын қарастырайық.

(32) теңдеу шешуінің құрылымы:

$$u=\alpha(x)+c\beta(x) \tag{34}$$

болатыны белгілі. Мұнда $\alpha(x)$ (32) теңдеудің дербес шешуі, ал $c\beta(x)$ (32) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешуі.

(33)-ті еске алсақ,

$$y=y_1+\frac{1}{\alpha(x)+c\beta(x)}=\frac{y_1\alpha(x)+cy_1\beta(x)+1}{\alpha(x)+c\beta(x)}=\frac{\alpha_1(x)+c\beta_1(x)}{\alpha(x)+c\beta(x)}$$

Демек, шешуінің құрылымы кез келген тұрақтыға байланысты бөлшек-сызықтық функция.

Ескерту: 1) Егер Рикатти теңдеуінің екі дербес шешімі белгілі болса, онда оның жалпы шешуі бір ғана квадратура арқылы табылады (бір рет қана интегралданады).

Мәселен, Рикатти теңдеуінің y_1 және y_2 дербес шешімдері болса, онда (33) бойынша $y = y_1 + \dfrac{1}{y_2 - y_1}$ ауыстыру формуласы Рикатти теңдеуін сызықтық теңдеуге келтіріледі.

2) Егер Рикатти теңдеуінің үш дербес шешімі болса, ешбір квадратурасыз табылады (интегралдаудың қажеті жоқ). Мәселен, Рикатти теңдеуінің дербес шешімдері y_1, y_2, y_3 болсын.

Онда $u_1 = \dfrac{1}{y_2 - y_1}; u_2 = \dfrac{1}{y_3 - y_1}$ сызықтық теңдеудің шешімі болар еді. Демек, $u = u_1 + c(u_2 - u_1)$ немесе

$$u = \frac{1}{y_2 - y_1} + c\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right)$$

Сызықтық теңдеудің жалпы шешуін осы арқылы ешбір квадратурасыз табуға болады.

Енді мына мәселеге тоқталайық.

Алғаш рет 1841 ж. Лиувилль Рикатти теңдеуінің жалпы (27) түріндегі теңдеуі ылғида квадратура арқылы интегралдана бермейтінін көрсеткен.

Сондықтан, Рикатти теңдеуінің практикада көп қолданылатынын еске ала отырып, квадратура арқылы интегралданатын түріне тоқталайық.

Рикатти теңдеуінің квадратура арқылы интегралданатын кейбір қарапайым түрлері:

1) $y' = ay^2 + by + c$ мұнда a, b, c-кез келген тұрақтылар, айнымалылары бөлектенетін теңдеу болғандықтан квадратура арқылы интегралданады.

2) $y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c)$ мұнда a, b, c кез келген тұрақтылар. Бұлда айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

3) $y' = \dfrac{ay^2}{x^2} + \dfrac{by}{x} + c$ біртекті теңдеу.

4) $y' = \dfrac{ay^2}{x^2} + \dfrac{by}{x} + c$ немесе $xy' = ay^2 + by + cx$

$y = z\sqrt{x}$ мұнда z x-тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.

5) $y' = ay^2 + \dfrac{b}{x}y + \dfrac{c}{x^2}$ жалпыланған біртекті теңдеу.

$(k = -1)$, $y = x^{-1}z = \dfrac{z}{x}$ ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.

Рикатти арнайы теңдеуі

$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$ дербес түрін қарастырайық. Мұнда a,b,m кез келген сандар. Бұл арнайы деп аталатын теңдеуді Рикаттидің өзі XVIII ғ. қарастырған.

1^0 Егер $m = 0$ болса, $\frac{dy}{dx} + ay^2 = b$ айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

2^0 $m = -2$ болса, $\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{b}{x^2}$ жалпыланған біртекті теңдеудің дербес түрі.

3^0 Арнайы Рикатти теңдеуі m саны мәнінің $\delta = \frac{m}{2m+4}$ бүтін сан болатын жағдайда квадратура арқылы интегралданады.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.