2 дәріс

Дәріс тақырыбы: **Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі**

Жоспар

1. 1 -ретті теңдеудің симметриялық түрі.
2. Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер түрлері және оларды шешу .
3. Жалпыланған біртекті теңдеу және оны интегралдау.

1 -ретті теңдеудің симметриялық түрі.

Енді біртекті теңдеулердің кейбір қасиеттері қолданылатын сызықтық деп аталатын теңдеулерді қарастырайық.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

теңдеуі берілсін. Бұдан $dy = f(x, y)dx$ шығады. Екі жағын $N(x, y) \neq 0$ функциясына көбейтейік, сонда

$$N(x, y)dy = f(x, y)N(x, y)dx$$

$$N(x, y)dy - f(x, y)N(x, y)dx = 0$$

$$M(x, y) = -f(x, y)N(x, y)$$

алсақ келесі теңдеу шығады.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{18}$$

осы теңдеу **бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық түрі** деп аталады.

2. ***Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер түрлері және оларды шешу .***

1-Анықтама. $M(x, y), N(x, y)$ функциялары m **өлшемді біртекті функция** деп аталады, егер барлық $t > 0$ үшін

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y), \tag{19}$$

мұнда $t = \frac{1}{x}$ деп алсақ,

$$f(1, \frac{y}{x}) = \frac{1}{x^m} f(x, y)$$

немесе

$$f(x, y) = x^m f(1, \frac{y}{x}) \tag{20}$$

2-Анықтама. Егер (18) теңдеуде $M(x, y), N(x, y)$ функциялары бірдей m өлшемдес болса, онда ол теңдеу **біртекті дифференциалдық теңдеу** деп аталады. (18) теңдеуге (20) қолдансақ:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\frac{x^m M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (21)$$

Егер (18) теңдеу (21) түріне келтірілсе , онда ол біртекті теңдеу . Біртекті теңдеуді интегралдау үшін

$$y=ux \qquad (22)$$

ауыстыруын қолданайық, мұнда u $x-$тің белгісіз жаңа функциясы, бұдан

$$dy=udx+xdu \qquad (23)$$

(22), (23)-ті (18) – ге қойсақ:

$$M(x,ux)dx+N(x,ux)(udx+xdu)=0$$

(20) – ға сүйенсек $x^m M(1,u)dx+x^m N(1,u)(udx+xdu)=0$

$$\left(M(1,u)dx+uN(1,u)\right)dx+xN(1,u)du=0 \qquad (24)$$

айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,u)du}{M(1,u)+uN(1,u)}=0\,; \qquad x=Ce^{-\int\frac{N}{M+uN}du}\,;$$

Егер $-\dfrac{N}{M+uN}du=\psi(u)$ деп алсақ, онда

$$x=Ce^{\psi(u)} \text{ немесе } x=Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (25)$$

жалпы интеграл

Ерекше шешу: Айнымалылары бөлектенетін теңдеу алу үшін (24) – ті $\left[M(1,u)dx+uN(1,u)\right]x$ өрнегіне бөлгенде $M(1,u)dx+uN(1,u)=0$ теңдеуінің $u=u_0$ түбірін жоғалтар едік. Сондықтан $y=u_0x$ ($x\neq 0$) бас нүктеге жақындап келетін жартылай түзулер ерекше шешуге күдікті шешу. Егер $y=u_0x$ (21) теңдеудің жалпы шешуінің құрамында болса, ерекше шешу емес, ал егер болмаса-ерекше шешу. Қандайда болмасын шешуі болу үшін теңдеуді тепе-теңдікке айналдыру қажет.

Ескерту: Біртекті теңдеу интегралдық қисықтарының өзіне тән бір қасиеттері бар. Мұны көрсету үшін (21) теңдеуді алайық. Бұл теңдеудің оң жағы бас нүктеден шығатын $y=kx$ ($x\neq 0$) жартылай түзулердің барлық нүктелерінде тұрақты мәндер қабылдайды. Сондықтан олар (21) теңдеудің изоклинасы болады. Жартылай түзулерден басқа бас нүктеден шығатын интегралдық қисықты алып, оның барлық нүктелердегі радиус-векторларын бірнеше есе көбейтсек немесе азайтсақ, жанамаларының бағыты алынған қисықпен бірдей болар еді. Демек осылайша алынған қисық (21) теңдеудің интегралдық қисығы.

Мысал: $2xydx-(x^2-y^2)dy=0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

біртекті теңдеу. $y = ux$ ауыстыруын қолданамыз. Бұдан $dy = udx + xdu$. Теңдеуге қойсақ

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow \left(1-u^2\right)xdu = u(1+u^2)dx;$$

$u(1+u^2)x$-ке бөлсек

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du = 0,$$

$$\frac{x(u^2+1)}{u} = C$$

немесе $x^2 + y^2 = Cy$ - Ox осін жанап, бас нүкте арқылы өтетін дөңгелектер тобы. $u(1+u^2) = 0,\ (1+u^2 \neq 0)$ $u = 0$ түбірі, олай болса $y = ux = 0; y = 0$ ерекше шешу.

Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{26}$$

теңдеуі берілсін. Егер $c = c_1 = 0$ болса, онда (26) біртекті теңдеу, сондықтан c және c_1 нольге тең емес деп алынады. Мына төмендегі екі жағдайды қарастырайық.

1) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ яғни коэффициенттері пропорционал емес.

Жазықтықта $\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{matrix}$ түзулерін қарастырайық.

Егер түзудің қиылысу нүктесі $\left(x_0, y_0\right)$ болса, онда

$$\begin{matrix} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{matrix} \tag{27}$$

(27)-ні x бойынша дифференциалдасақ, яғни

$$\begin{matrix} dx = du \\ dy = dv \end{matrix} \tag{28}$$

(27) және (28)-ді (26)-ға қойсақ

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)$$

Біртекті теңдеу шығады.

2) $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$ яғни коэффициенттері пропорционал.

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=k\neq 0$$

Демек, жазықтықтағы түзулер өзара параллель, сондықтан $ax+by=k(a_1x+b_1y)$

Ендеше (26) теңдеу

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

түріне келтіріледі де, $z=a_1x+b_1y$ (29) сызықтық ауыстыруы арқылы одан айнымалылары бөлектенетін теңдеу аламыз.

Жоғарыдағы жағдайларды өзбеттеріңізбен дәлелдеңіздер.

Ескерту: (21) теңдеу үшін $u=cx;\quad v=cy$, c кез келген тұрақты, түрлендіру тобы қолданылады, өйткені

$$\frac{dv}{du}=\frac{dy}{dx},\qquad \frac{v}{u}=\frac{y}{x}$$

Бұл ұқсастық центрі координаттар жүйесінің бас нүктесінде болатын ұқсастық түрлендіру. Демек, бас нүкте арқылы өтетін әр түзулерінде жанама мен өріс бағыттары бірдей, сондықтан бұл түзулер изоклина болады.

3. Жалпыланған біртекті теңдеулер және оларды интегралдау

$$F(x,y,y')=0 \tag{30}$$

теңдеуі берілсін.

1-Анықтама. Егер x,y,y' аргументтерін сәйкес $1-,k-,(k-1)$-өлшемдес деп алғанда, (30) теңдеудің сол жағы біртекті функция болса, онда ол **жалпыланған біртекті теңдеу** деп аталады, яғни

$$F(tx,t^ky,t^{k-1}y')=t^mF(x,y,y') \tag{31}$$

орынды.

Жалпыланған біртекті (30) теңдеуді интегралдау үшін

$$x=e^t,\ y=ue^{kt} \tag{32}$$

ауыстыруын қолданамыз, мұнда t жаңа тәуелсіз айнымалы, ал u жаңа белгісіз функция.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t} \tag{33}$$

(32)-нің екіншісін t бойынша дифференциалдап орнына қойсақ

$$y' = \left(\frac{du}{dt} + ku\right)e^{(k-1)t} \tag{34}$$

шығады. (30) теңдеуден

$$F\left[e^t, ue^{kt}, \left(\frac{du}{dt} + ku\right)e^{(k-1)t}\right] = 0 \tag{35}$$

Біртекті қасиетін еске алсақ

$$e^{mt}F(1, u, \frac{du}{dt} + ku) = 0$$

немесе

$$F\left(1, u, \frac{du}{dt} + ku\right) = 0 \tag{36}$$

теңдеуі шығады. Бұл $F_1(u, u') = 0$ теңдеуі сияқты.

Егер u' арқылы айқындалса, оңай интегралданады. Басқа жағдайларда параметр енгізу әдісін қолданамыз.

2-Анықтама. (18) симметриялық түріндегі 1-ретті дифференциалдық теңдеу жалпыланған біртекті деп аталады, егер бір k саны табылып, $y = u^k$ ауыстыруы арқылы (18) x және u ға байланысты біртекті теңдеу болса.

Осыны өзбетіңізбен дәлелдеңіз.

Ескерту: Мына төмендегі жалпы түрдегі

$$\frac{dy}{dx} = x^{k-1}f\left(\frac{y}{x^k}\right) \tag{37}$$

қарастырайық.

$k = 1$ болғанда (21) теңдеу шығады. (37) –ні интегралдау үшін

$$y = x^k u \tag{38}$$

ауыстыруы қолданылады.

$$\frac{dy}{dx} = kx^{k-1}u + x^k\frac{du}{dx} = x^{k-1}f(u)$$

$$\frac{du}{f(u) - ku} = \frac{dx}{x} \tag{39}$$

айнымалылары бөлектенген теңдеуге келтірілді.

$$x = ce^{\int \frac{du}{f(u) - ku}}$$

мұнда $c \neq 0$ кез келген тұрақты.

Мысалдар: 1) $2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

біртекті теңдеу. $y = ux$ ауыстыруын пайдаланамыз

$$dy = udx + xdu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{dy}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du = 0$$

$\frac{x(u^2+1)}{u} = c$ $u = \frac{y}{x}$ -ті қойсақ $x^2 + y^2 = cy$ жалпы шешімі, $0x$ осін жанай, бас нүкте арқылы өтетін дөңгелектер тобы.

$$u(1+u^2) = 0, \qquad (1+u^2 \neq 0), \qquad k = 0$$

$y = ux = 0;$ $y = 0$ ерекше шешімі.

2) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

$x = u + \alpha \qquad dx = du$

$y = v + \beta \qquad dy = dv$

$\frac{dv}{du} = \frac{2u - 4v + 2\alpha - 4\beta + 6}{u + v + \alpha + \beta - 3};\qquad \begin{cases} 2\alpha\text{-}4\beta + 6 = 0 \\ \alpha + \beta\text{-}3 = 0 \end{cases} \quad \alpha = 1, \beta = 2$

$x = u + 1, y = v + 2,$ $\frac{dv}{du} = \frac{2u - 4v}{u + v}$ біртекті теңдеу $\frac{u}{v} = z$ ауыс-тыруын пайдаланамыз.

$v = uz;$ $\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du};$ $z + u\frac{dz}{du} = \frac{2-4z}{1+z};$ $\frac{du}{u} = \frac{(1+z)dz}{2 - 5z - z^2}$ интегралдап, z орнына $\frac{u}{v}$ -ды қойып, ал v және u - дың орнына $\begin{matrix} u = x - 1 \\ v = y - 2 \end{matrix}$ мәндерін қойсақ $(y - 2x)^3 = c(y - x - 1)^2$ жалпы шешімі шығады. $y = x + 1$ ерекше шешімі.

3) $(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0$

$$\begin{matrix} 6dx - & x^2y^2dx + & x^2dy = 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 = & 2 + 2k = & 2 + k - 1 \Rightarrow k = -1; \end{matrix}$$

Демек $y = x^{-1}u$ ауыстыруын пайдаланамыз. Мұны x бойынша дифференциалдап, теңдеудегі y және dy орнына қойсақ $\frac{du}{u^2 + u - 6} - \frac{dx}{x} = 0$ айнымалылары бөлектенген теңдеу шығады. Интегралдасақ $y = \frac{2 - 3cx^5}{x(1 - cx^5)}$ жалпы шешуі шығады.

Ерекше шешуге күдікті шешуді іздейік

$$(u^2+u-6)x=0 \qquad x=0\ (y\neq 0)$$

$$u^2+u-6=0 \qquad u_1=2, u_2=-3$$

$y=\frac{2}{x}$ ерекше шешу емес, себебі $c=0$ болғанда, ол жалпы шешуден шығады, ал $y=-\frac{3}{x}$ ерекше шешу.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982
9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.
10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.