1 дәріс

***Дәріс тақырыбы:* Анықтамалар және негізгі ұғымдар. Бірінші ретті теңдеудің шешімінің геометриялық және физикалық мағынасы. Изоклиналар. Коши есебі. Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер**

Жоспар

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі.
2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар.
3. Коши есебі. Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл. Ерекше шешу
4. Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер.

1. *Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі*

Координаттары x, y белгіленген декарттық тікбұрышты жүйесінің евклид жазықтығын $R^2_{(x,y)}$ арқылы таңбалайық, ал $G \subseteq R^2_{(x,y)}$ және $f(x,y)$ G облысында берілген кейбір үзіліссіз функция болсын.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді оқуды туындысы арқылы айқындалған

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

теңдеуінен бастайық. Мұнда $x-$тәуелсіз айнымалы (яғни аргумент), ал $y = y(x) - x-$тің белгісіз функциясы.

1-Анықтама. Тәуелсіз айнымалы x, белгісіз функция y және оның бірінші ретті туындысы y' немесе $\frac{dy}{dx}-$ті байла-ныстырып тұратын қатынасты **бірінші ретті дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

Мысалы: $$y' = x^2 + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} - 3xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^2 y = \sqrt{x}$$

2-Анықтама. Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бір ғана тәуелсіз айнымалының функциясы болса, онда оны **жай дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

Бұл тарауда негізінен бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулерді қарастырамыз. Оның жалпы түрі былайша жазылады:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2}$$

(1) теңдеуді **туындысы арқылы айқындалған не бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі** деп атайды.

(2) теңдеудің шешуі жөнінде түсінік берейік:

Декарттық координаты x болатын $R_x^{'}$ сандық түзудің кейбір аралығы X болсын.

3-Анықтама. X аралығында анықталған $y=\varphi(x)$ функциясы **(1) теңдеудің шешуі** деп аталады, егер

1) $\exists\varphi'(x)$ X −те

2) барлық $x\in X$ үшін $[x,\varphi(x)]\in G$

3) X аралығында
$\varphi'(x)\equiv f[x,\varphi(x)]$.

Енді бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық деп аталатын түріне тоқтала кетейік. (1) теңдеуді қарастырайық.

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\Rightarrow dy-f(x,y)dx=0\Big|\times N(x,y)$$

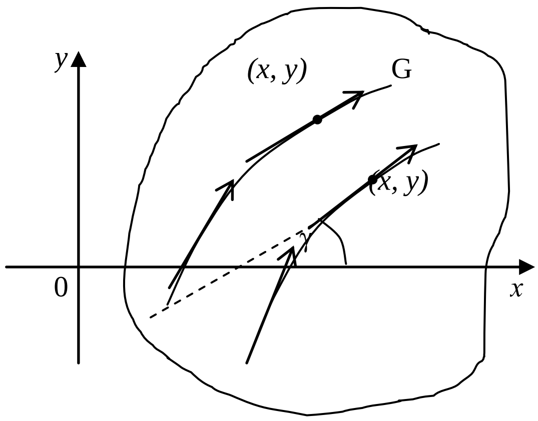
$$N(x,y)dy\underbrace{-f(x,y)N(x,y)}_{M(x,y)}dx=0$$

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3}$$

(3) бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі деп аталады, бұдан тиісті операциялар арқылы (1) теңдеуді алуға болады.

2. *Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар*

(1) теңдеудің $y=\varphi(x), x\in X$ түріндегі шешуін табудың ылғи да сәті түсе бермейді, көпшілік жағдайда $\Phi(x,y)=0$ түрінде айқындалмаған болып келеді. Жалпы (1) теңдеуді шешуін табу процесін оны интегралдау деп те атайды, (1) теңдеу шешуінің G облысындағы сәйкес қисығының графигі интегралдық қисықтар деп аталады. $x,y\in G$ жазықтықтағы тікбұрышты координаттар болсын. Онда, жоғарыда айтылғандай, (1) теңдеудің $y=\varphi(x)$ шешуінің графигі ретінде оған бір қисық сәйкес келеді. Осы қисықты бұдан әрі интегралдық қисық деп атаймыз. Кейде осы интегралдық қисықтың өзін шешу деп қарастыруға болады. (1) теңдеудің сол жағы OX осінің оң бағытымен $y=\varphi(x)$ қисығына $(x,y)\in G$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың арасындағы бұрыштың тангенсі болатыны белгілі. Сондықтан (x,y) сияқты кезкелген нүктеде G облысында (1) теңдеу белгілі бір бағыт береді, яғни координаттары $\{1, f(x,y)\}$ әр нүктеде салынған векторлар пайда болады. Осы әр нүктеден салынған векторлар өріс бағытын береді (1-сызба). Бұл бағыт кезкелген $(x,y)\in G$ нүктесінде $tg\varphi=f(x,y)$ теңдеуі арқылы анықталады.



(1-сызба).

Осы қасиеті арқылы интегралдық қисықтарды басқа толып жатқан қисықтардан ажыратып алуға болады (жазықтықтағы нүкте арқылы шексіз көп қисықтар жүргізуге болатынын ұмытпаңыз).

Анықтама. Егер интегралдық қисықтың әрбір нүктесінде (1) теңдеумен анықталатын өрістің көлбеу бағыты әрқашанда бірдей болса, онда оны **изоклина** деп атайды.

Изоклинаның теңдеуі

$$f(x, y) = k \tag{4}$$

мұнда $k-$тұрақты сан, $k = tg\varphi,\ \varphi - OX$ осімен интегралдық қисыққа жүргізілген жанама арасындағы бұрыш. Яғни (1) теңдеу өріс бағыттарының изоклинасы G облысының барлық нүктесінде өріс бағыттары бірдей k бұрыштық коэффициентіне тең қисықты айтады. Изоклина (1) теңдеу шешуін аналитикалық түрде таппай-ақ, оның интегралдық қисығының бейнесін алуға мүмкіндік береді.

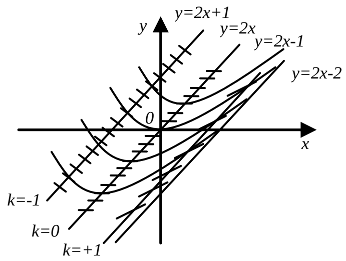
Мысалы: Изоклина арқылы $y' = 2x - y$ теңдеуінің интегралдық қисықтарын жуықтап салу керек. Изоклина теңдеуі $2x - y = k;$ егер $k = -1{,}0{,}1$ болса, онда $y = 2x + 1,\ \ y = 2x,\ \ y = 2x - 1.$ Бұлардың барлығы өзара параллель түзулер. Берілген теңдеудің екінші туындысын тауып, оны экстремумға зерттегенде, экстремум нүктелерінің жоқ екенін білеміз. Енді өрістердің бағыты қандай болар еді.

$$k = -1, tg\varphi = -1, \varphi = 135^\circ$$

$$k = 0, tg\varphi = 0, \varphi = 0^\circ$$

$$k = 1, tg\varphi = 1, \varphi = 45^\circ$$

Осы зерттеулер берілген теңдеу интегралдық қисықтарын жуықтап салуға мүмкіндік береді (2-сызба).



2-сызба

Өз бетімен шығаруға есептер

Изоклина әдісімен келесі дифференциалдық теңдеулердің интегралдық қисықтарының бейнесін сал.

1. $y' = 2x - y + 1$; 4. $y' = \frac{|xy|}{xy}$;

2. $y' = y^2$;

3. $y' = \frac{x - y}{x + y}$; 5. $y' = -\frac{x}{y}$;

Ескерту: Дифференциалдық теңдеуді интегралдауды дифференциалдауға кері есеп деп қарастыруға болады. Мәселен, интегралдық есептеулерде берілген $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы (алғашқы функциясы) табылады. Мұны теңдеу арқылы былай жазуға болады; егер алғашқы функцияны y арқылы таңбалайтын болсақ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ немесе

$$dy = f(x)dx. \tag{5}$$

$$y = \int f(x)dx + C, \tag{6}$$

мұндағы C-кез келген тұрақты. (6) теңдіктен белгісіз функция $y = y(x)$ бірмәнді болмайтындығы шығады, ал бұл (5) дифференциалдық теңдеудің шексіз көп шешуі болатынын көрсетеді. Егер шешуде C кез келген тұрақты болса, оны жалпы шешу деп атайды. Ал C-ға белгілі бір мән берсек дербес шешу шығады. Практика жүзінде (5) теңдеудің шексіз көп шешулерінің бәрін қарастырудың қажеті болмайды, көпшілік жағдайда дербес деп аталатын шешулер қарастырылады.

3. Коши есебі. Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл. Ерекше шешу

(1) теңдеу үшін Коши есебі былай қойылады:

(1) теңдеудің толып жатқан барлық шешулерінің ішінен берілген x_0 сан мәні бойынша функцияның өзі y_0 сан мәнін алатындай

$$y = \varphi(x) \tag{7}$$

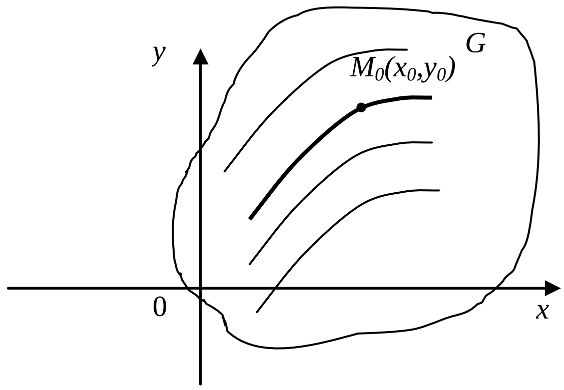
шешуін табу қажет, яғни

$$y(x_0) = y_{0,}\ \ (x_0, y_0) \in G, \tag{8}$$

мұндағы x_0 және y_0 бастапқы берілгендер, ал (8) бастапқы шарт деп аталады. Коши есебін геометриялық тұрғыдан былай өрнектейміз: (1) теңдеудің толып жатқан барлық интегралдық қисықтарының ішінен жазықтықта берілген $M_0(x_0, y_0) \in G$ арқылы өтетінін табу керек (3-сызба).

Егер $h > 0$ саны бар болып, осы сан үшін $|x - x_0| \le h$ аралығында $y(x_0) = y_0$ болатындай $y = \varphi(x)$ шешуі анықталса, онда Коши есебінің тек бір ғана шешуі болады, басқа шешуі болуы мүмкін емес.

Егер Коши есебінің бір ғана емес бірнеше шешуі болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде жалғыз ғана шешуінің бар болуы бұзылады деп есептеледі.



3-сызба

Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл

(1) теңдеудің шексіз көп шешулерінің C тұрақтыға байланысты болатын

$$y = \varphi(x, C) \tag{9}$$

шешуі **жалпы шешу** деп аталады. Бұл геометриялық тұрғыдан (x, y) жазықтығында интегралдық қисықтар тобын өрнектейді. Осы жалпы шешуден бастапқы берілгендер x_0, y_0 арқылы Коши есебінің шешуін алуға болады. (9) теңдікке x_0, y_0 мәндерін қоямыз.

$$y_0 = \varphi(x_0, C) \Rightarrow C_0 = \psi(x_0, y_0) \tag{10}$$

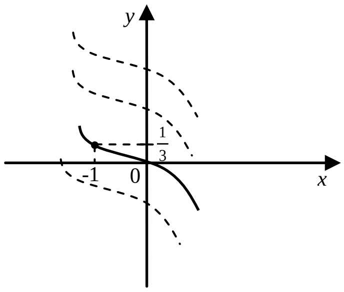
(10) теңдікті (9) теңдікке қойып Коши түріндегі дербес шешуді алуға болады. $y = \varphi[(x, \psi(x_0, y_0)]$ немесе

$$y = \varphi(x, C_0) \tag{11}$$

Мысал: Теңдеудің жалпы шешуі $y = Cx^3$ болсын. $M_0(-1{,}3)$ нүктесіне сәйкес Коши түріндегі шешуін тап.

$$x_0 = -1, y_0 = 3 \Rightarrow 3 = C_0(-1)^3 \Rightarrow C_0 = -\frac{1}{3}$$

$y=-\frac{1}{3}x^3$-Коши түріндегі шешу (дербес шешу). Бұл геометриялық тұрғыдан $M_0(-1,3)$ нүктесі арқылы өтетін жалғыз ғана интегралдық қисықты



көрсетеді (4-сызба).

4-сызба

Егер (1) теңдеудің шешуі y арқылы айқындалмаған

$$\Phi(x,y,C)=0 \tag{12}$$

түрінде алынса, оны жалпы интеграл деп айтады. (12) теңдіктен

$$C=\Psi(x,y) \tag{13}$$

алынса, ол канондық түрдегі жалпы интеграл деп аталады. Канондық жалпы интегралдың негізгі бір қасиеті: егер y-тің орнына теңдеудің кез келген бір дербес шешуін қойсақ, (13)-тің оң жағы әрқашанда тұрақты шама береді. Мәселен, $\Psi(x,\varphi(x))=const$.

Ерекше шешу

Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылатын әрбір нүктедегі шешу ерекше шешу деп аталады. Геометриялық тұрғыдан ерекше шешу теңдеу шешулерінің интегралдық қисықтар тобының құрамында болмайды, сондықтан да теңдеу жалпы шешуінің бар болатын облысында жатпайды.

4. Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

Айнымалылары бөлектенетін теңдеулер (3) симметриялық түріндегі теңдеуге ұқсас.

$$M(x)N(y)dx+M_1(x)N_1(y)dy=0 \tag{14}$$

$M(x)$, $M_1(x)-x\in(a,b)-$тің берілген үзіліссіз функциялары, $N(y)$, $N_1(y)-y\in(c,d)-$тің берілген үзіліссіз функциялары, айнымалылары бөлектенетін теңдеу деп аталады. Мұнда G облысында (14) теңдеудің ерекше нүктелері болмайды деп алынады. Егер

$M_1(x_0)=0$ болатын $x_0\in(a,b)$ табылса, онда $x=x_0$ (14) теңдеудің шешуі болар еді, осыған ұқсас $N_1(y_0)=0$ болатын $y_0\in(c,d)$ табылса, онда $y=y_0$ (14) теңдеудің шешуі болады.

Егерде $N(y)\neq 0$ және $M_1(x)\neq 0$ болса, $(x_1,y_1)\in G$ нүктесінің аймағында (14) теңдеу мына төмендегі теңдеумен пара – пар болар еді, себебі екі теңдеудің де шешулерінің жиыны бірдей.

$$\frac{M(x)}{M_1(x)}dx+\frac{N_1(y)}{N(y)}dy=0 \qquad (15)$$

Бұл айнымалылары бөлектенген теңдеу. Практика жүзінде (14) теңдеудің екі жағын $M_1(x)N(y)\neq 0$ өрнегіне бөліп (14) теңдеуден алуға болады. (15) интегралдау арқылы

$$\int\frac{M(x)}{M_1(x)}dx+\int\frac{N_1(y)}{N(y)}dy=C \qquad (16)$$

жалпы интегралын табамыз. $M_1(x_0)\neq 0,\quad N(y_0)\neq 0$. (16) – да $C=0$ және $M(x_0)\neq 0$, $N_1(y_0)\neq 0$ (біруақытта нольге тең емес) деп алып x_0,y_0 бастапқы берілгендерге сәйкес шешуін аламыз.

$$\int_{x_0}^{x}\frac{M(x)}{M_1(x)}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{N_1(y)}{N(y)}dy=0 \qquad (17)$$

Мысал: $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$ теңдеуін интегралдау керек. Теңдеудің екі жағын $\left(\sqrt{1-y^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}\right)\neq 0$ өрнегіне бөлеміз. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$ айнымалылары бөлектенген теңдеу. Интегралдап жалпы шешуін табамыз. Сонда $\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}=C$, $C>0$. Мұнда мына шешулер

$$y=1,(-1<x<1);\quad x=1,(-1<y<1);$$
$$y=-1,(-1<x<1);\quad x=-1,(-1<y<1)$$

ерекше шешулер, себебі тұрақты шама C-ның қандайда мәні болмасын оларды жалпы шешуден алуға болмайды. Бұл жағдайда Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылады.

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..

7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Қосымша

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982

9. Абдыманапов С.А. Дифференциальные уравнения. Тезисы лекций.- Караганда: КарГУ, 1990.

10. Абдыманапов С.А., Есбаева Г.А. Руководство к решению задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие.- Караганда: КарГУ, 1991.