Дәріс 15

ШЕНЕЛМЕГЕН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРЫ

Дәріс құрылымы

1. Шенелмеген функцияның меншіксіз интегралы
2. Жинақталудың Коши критерийі
3. Абсолютті жинақталу
4. Ішкі ерекше нүкте және интегралдың бас мәні
5. Коши теңсіздігі және оның меншіксіз интегралдарға қолданысы

Оң жақ шетте шенелмеген функция

f функциясы $[a,b)$ аралығында анықталсын, $a<b$. Әрбір $a<c<b$ үшін f функциясы $[a,c]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын. f функциясы b нүктесінің әрбір сол жақ маңайында шенелмеген болсын.

$$S(c)=\int_a^c f(x)dx, \qquad a<c<b$$

Меншіксіз интегралдың анықтамасы

Егер $S(c)$ функциясының $c\to b-0$ кезіндегі ақырлы шегі бар болса,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx\in\mathbb{R}$$

онда f функциясы $[a,b)$ аралығында меншіксіз интегралданады деп аталады.

Бұл жағдайда меншіксіз интеграл жинақталады.

Жинақталмайтын интеграл

$c \to b - 0$ болғанда $S(c)$ функциясының

1. шегі $+\infty$ немесе $-\infty$ болса,
2. не ешқандай шегі болмаса,

$\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақталмайды.
$\int_a^b f(x)dx = +\infty$ немесе $-\infty$ жазылуы жинақсыздықтың түрін көрсетеді

Жинақталудың Коши критерийі

$\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақталуы үшін әрбір $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ табылып,

$$a < b - \delta < u < v < b$$

болған сайын

$$\left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті де жеткілікті.

Абсолютті жинақталу

f функциясы әрбір $[a, c]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын, $a < c < b$. Егер $\int_a^b |f(x)|dx$ интегралы жинақталса, $\int_a^b f(x)dx$ интегралы абсолютті жинақталады.

Абсолютті жинақталатын интеграл жинақталады. Жинақталатын интеграл абсолютті жинақталмауы мүмкін.

Аралықтың ішкі ерекше нүктесі

$a < d < b$ болсын. f функциясы $[a, b]$ жиынында $x \neq d$ нүктелерінде анықталсын. Әрбір $a < c_1 < d < c_2 < b$ үшін f функциясы $[a, c_1]$ және $[c_2, b]$ сегменттерінде интегралдансын. d нүктесіндегі үзіліске байланысты интеграл екі біржақты меншіксіз интегралға бөлінеді.

Әр бөліктің жинақталуы жеке зерттеледі.

Ішкі ерекше нүктедегі жинақталу шарты

$I_-(\delta)$ — f функциясының $[a, d - \delta]$ аралығындағы интегралы.
$I_+(\delta)$ — f функциясының $[d + \delta, b]$ аралығындағы интегралы.

$$\lim_{\delta_1 \to +0} I_-(\delta_1) = L \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\delta_2 \to +0} I_+(\delta_2) = M \in \mathbb{R}$$

Екі ақырлы шек те бар болғанда

$$\int_a^b f(x)dx = L + M.$$

Коши бойынша бас мән

δ_1 және δ_2 нөлге бір-бірінен тәуелсіз ұмтылғанда екі бөліктің қосындысының шегі болмауы мүмкін. Бірақ $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ жағдайында ақырлы шек бар болуы мүмкін:

$$v.p.\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to +0}[I_-(\delta) + I_+(\delta)].$$

Бұл шек интегралдың Коши бойынша бас мәні деп аталады.

Бас мән мен меншіксіз интегралдың айырмасы

Меншіксіз интеграл

Сол және оң жақтағы интегралдардың әрқайсысы жеке-жеке ақырлы шекке ие болуы тиіс.

Бас мән

Ерекше нүктенің екі жағынан бірдей δ қашықтық алынады. $I_-(\delta) + I_+(\delta)$ қосындысының ақырлы шегі талап етіледі.

Бас мәннің бар болуы меншіксіз интегралдың жинақталуын білдірмейді.

Мысал $f(x) = \frac{1}{x}$

$a = -1, b = 1, d = 0$ болсын.

$$I_-(\delta_1) = ln\,\delta_1, \qquad I_+(\delta_2) = -ln\,\delta_2.$$

$$I_-(\delta_1) + I_+(\delta_2) = \ln(\delta_1/\delta_2)$$

$\delta_1 = \delta_2 = \delta$ болғанда қосынды нөлге тең. Сондықтан

$$v.p.\int_{-1}^{1} dx/x = 0.$$

Мысалдағы тәуелсіз шектер

$$I_-(\delta_1) + I_+(\delta_2) = ln(\delta_1/\delta_2)$$

$\delta_1 = \delta^2, \delta_2 = \delta$ болса: $\ln(\delta_1/\delta_2) = \ln\delta \to -\infty.$

$\delta_1 = e\delta, \delta_2 = \delta$ болса: $\ln(\delta_1/\delta_2) = 1.$

Шек жақындау тәсіліне тәуелді. $\int_{-1}^{1} dx/x$ меншіксіз интегралы жинақталмайды, ал оның бас мәні бар және нөлге тең.

Коши теңсіздігі

f және g функциялары $[a,b]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын.

Онда

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]^{1/2}.$$

Коши теңсіздігі шенелмеген аралық

f және g әрбір $[a,A]$ сегментінде интегралдансын. $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} g^2(x)dx$ жинақталсын. Онда fg көбейтіндісі $[a,+\infty)$ аралығында абсолютті интегралданады және

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx\right| \le \left[\int_a^{+\infty} f^2(x)\,dx\right]^{1/2}\left[\int_a^{+\infty} g^2(x)\,dx\right]^{1/2}.$$

Коши теңсіздігі шенелмеген функциялар

f және g әрбір $[a,c]$ сегментінде интегралдансын. $\int_a^b f^2(x)dx$ және $\int_a^b g^2(x)dx$ жинақталсын, $c<b$. Онда fg көбейтіндісі $[a,b)$ аралығында абсолютті интегралданады және

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]^{1/2}.$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.

2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.