EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 14

МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРДЫҢ ЖИНАҚТАЛУЫ

Коши критерийі, Абель және Дирихле белгілері

Дәріс құрылымы

1. Меншіксіз интеграл жинақталуының Коши критерийі

2. Интегралдың абсолютті жинақталуы

3. Абсолютті жинақталу туралы теорема

4. Дирихле және Абель белгілері

Коши критерийі

f функциясы әрбір $[a, A]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын, $A > a$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақталуы үшін әрбір $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $r = r(\varepsilon) > a$ табылып, барлық $r < u < v$ үшін

$$\left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті де жеткілікті.

Коши критерийінің мағынасы

$$S(A) = \int_a^A f(x)dx$$

$$S(v) - S(u) = \int_u^v f(x)dx$$

u және v жеткілікті үлкен болғанда осы айырманың абсолюттік шамасы кез келген $\varepsilon > 0$ санынан кіші болады.

Критерийді қолдану үшін интегралдың мәнін алдын ала білу қажет емес.

Интегралдың абсолютті жинақталуы

f функциясы $[a,+\infty)$ аралығында анықталып, әрбір $[a,A]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын.

Егер

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$$

болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы абсолютті жинақталады деп аталады.

Абсолютті жинақталу туралы теорема

Теорема. Абсолютті жинақталатын меншіксіз интеграл жинақталады.

Яғни $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$жинақталуынан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақталуы шығады.

Теореманың Коши критерийі арқылы дәлелденуі

$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интегралы жинақталсын. Коши критерийі бойынша әрбір $\varepsilon > 0$ үшін жеткілікті үлкен $u < v$ болғанда

$$|\int_u^v f(x)dx| \leq \int_u^v |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Демек, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы үшін де Коши критерийі орындалады. Интеграл жинақталады.

Көбейтінді түріндегі интеграл

Дирихле және Абель белгілерінде интеграл астындағы функция екі көбейткішке жіктеледі:

$$f(x) = u(x)v(x), \qquad x \in [a, +\infty)$$

Зерттелетін интеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx$$

Дирихле белгісі

$f(x) = u(x)v(x)$ болсын. Төмендегі шарттар орындалсын:

1. u функциясы әрбір $[a, A]$ сегментінде интегралданады және барлық $A > a$ үшін

$$\left|\int_a^A u(x)\,dx\right| \leq M, \qquad M > 0.$$

2. v функциясы $[a, +\infty)$ аралығында монотонды және $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$.

Онда $\int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx$ интегралы жинақталады.

Абель белгісі

$f(x) = u(x)v(x)$ болсын. Төмендегі шарттар орындалсын:

1. $\int_a^{+\infty} u(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақталады.

2. v функциясы $[a, +\infty)$ аралығында монотонды және шенелген.

Онда $\int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx$ интегралы жинақталады.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.

2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.