EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 13

ШЕНЕЛМЕГЕН АРАЛЫҚТАҒЫ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

негізгі қасиеттері және жинақталу белгілері

Дәріс құрылымы

1. Шенелмеген аралықтағы меншіксіз интеграл

2. Жинақталу және жинақсыздық

3. Дәрежелік функцияның интегралы

4. Сызықтылық және аддитивтік қасиеттер

5. Теріс емес функция үшін жинақталу критерийі

6. Салыстыру теоремасы және оның салдары

Айнымалы жоғарғы шекті интеграл

$f(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ аралығында анықталсын. Әрбір $A > a$ үшін f функциясы $[a,A]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын.

$$S(A) = \int_a^A f(x)dx, \qquad A > a$$

Осылайша, A айнымалысына тәуелді $S(A)$ функциясы анықталады.

$[a,+\infty)$ аралығындағы меншіксіз интеграл

Егер $S(A)$ функциясының $A \to +\infty$ кезіндегі ақырлы шегі бар болса,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx = M \in R$$

онда бұл сан f функциясының $[a,+\infty)$ аралығындағы меншіксіз интегралы деп аталады.

Бұл жағдайда меншіксіз интеграл жинақталады.

Меншіксіз интегралдың жинақсыздығы

Меншіксіз интеграл мына жағдайларда жинақталмайды:

1. $\lim_{A\to+\infty} S(A) = +\infty$ немесе $-\infty$.

2. $S(A)$ функциясының $A \to +\infty$ кезінде шегі жоқ.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ белгілеуі интегралдың ақырлы мәнге жинақталуын білдірмейді.

Дәрежелік функцияның меншіксіз интегралы

Кез келген $\alpha \in \mathbb{R}$ үшін мына интегралды қарастырайық:

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} dx/x^{\alpha}$$

Оның жинақталуын анықтау үшін

$$S(A) = \int_1^{A} dx/x^{\alpha}, A > 1$$

функциясының $A \to +\infty$ кезіндегі шегін зерттейміз.

α ≠ 1 жағдайы

Алғашқы функцияны пайдалансақ,

$$\boldsymbol{S(A) = (A^{1-\alpha} - 1)/(1 - \alpha)}$$

$\alpha > 1$ болса, $A^{1-\alpha} \to 0$, сондықтан

$$I(\alpha) = 1/(\alpha - 1)$$

$\alpha < 1$ болса, $S(A) \to +\infty$. Интеграл жинақталмайды.

α = 1 жағдайы және қорытынды

$\alpha = 1$ болғанда

$$S(A) = \int_1^A dx/x = \ln A \to +\infty$$

Демек, $\int_1^{+\infty} dx/x$ интегралы жинақталмайды.

$\int_1^{+\infty} dx/x^{\alpha}$ тек α > 1 болғанда жинақталады.

$\alpha \leq 1$ болғанда интеграл $+\infty$-ке тең болып жинақталмайды.

$(-\infty, b]$ аралығындағы меншіксіз интеграл

f функциясы әрбір $[\beta, b]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын, $\beta < b$.

$$S(\beta) = \int_{\beta}^{b} f(x)\,dx$$

Егер $\beta \to -\infty$ кезінде $S(\beta)$-ның ақырлы шегі бар болса,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{b} f(x)dx$$

Бүкіл сан осіндегі меншіксіз интеграл

f функциясы әрбір $[B, A]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын. $a \in \mathbb{R}$ нүктесін таңдайық.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \mathrm{L}, \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \mathrm{M}$$

Екі интеграл да жеке-жеке ақырлы мәнге жинақталса,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mathrm{L} + \mathrm{M}$$

Екі бөліктің де жинақталуы қажет.

Сызықтылық қасиеті

$\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ интегралдары жинақталсын. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ болсын. Онда $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ функциясының интегралы да жинақталады және

$$\int_a^{+\infty} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\, dx = c_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)\, dx + c_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)\, dx.$$

Аддитивтік қасиет және қалдық интеграл

f функциясы әрбір $[a, A]$ сегментінде интегралдансын. $r > a$ болсын. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақталуы үшін $\int_r^{+\infty} f(x)dx$ қалдық интегралының жинақталуы қажетті де жеткілікті.

Жинақталған жағдайда:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^{+\infty} f(x)dx$$

Теріс емес функция үшін жинақталу критерийі

$f(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty)$, және f әрбір $[a, A]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралының жинақталуы үшін

$$S(A) = \int_a^A f(x)dx$$

функциясының жоғарыдан шенелуі қажетті де жеткілікті.

Критерийдің негіздемесі

$v > u > a$ болғанда $f(x) \geq 0$ болғандықтан

$$S(v) - S(u) = \int_u^v f(x)dx \geq 0.$$

Демек, $S(A)$ — кемімейтін функция.

Кемімейтін функцияның ақырлы шегі болуы оның жоғарыдан шенелуімен пара-пар.

Салыстыру теоремасы

f және g әрбір ақырлы $[a, A]$ сегментінде интегралдансын. Қайсыбір $R \geq a$ үшін барлық $x \geq R$ нүктелерінде

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

теңсіздігі орындалсын.

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ жинақталса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ -те жинақталады.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақталмаса, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ -те жинақталмайды.

Шектік салыстыру белгісі

$f(x) \geq 0, g(x) > 0$ болсын. Екі функция да әрбір ақырлы $[a, A]$ сегментінде интегралдансын.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) = k, \qquad 0 < k < \infty$$

Онда

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралдары бір мезгілде жинақталады немесе бір мезгілде жинақталмайды.

Шектік салыстырудың шеткі жағдайлары

$k = \lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x), f(x) \geq 0, \ g(x) > 0.$

$k = 0$ болса: $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ жинақталуынан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақталуы шығады.

$k = +\infty$ болса: $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ жинақталмауынан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақталмауы шығады.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.
2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.