EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 12

ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАРЛАР

Дәріс құрылымы

1. Дәрежелік қатардың анықтамасы

2. Жинақталу радиусы және Коши–Адамар формуласы

3. Бірқалыпты жинақталу және үзіліссіздік

4. Абель теоремасы

5. Мүшелеп интегралдау және дифференциалдау

6. Тейлор қатары және функцияны қатарға жіктеу

Дәрежелік қатардың анықтамасы

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ сандық тізбегі берілсін.

$$\boldsymbol{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum a_n x^n}$$

Бұл қатар дәрежелік қатар деп аталады. a_n — қатардың коэффициенті, x — айнымалы.

Әрбір $a_n x^n$ мүшесі барлық $x \in \mathbb{R}$ үшін анықталған. Қатардың қосындысы оның жинақталу жиынында анықталады.

Орталығы x_0 болатын дәрежелік қатар

Дәрежелік қатардың жалпы түрі:

$$\boldsymbol{a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots}$$

Мұндағы $x_0 \in \mathbb{R}$ — қатардың орталығы.

$t = x - x_0$ ауыстыруы қатарды $\sum a_n t^n$ түріне келтіреді. Бұдан әрі $\sum a_n x^n$ қатарында қосынды $n = 0$ -ден ∞-ке дейін алынады.

Жинақталу радиусы

Дәрежелік қатардың жинақталу радиусы R деп белгіленеді.

$|x| < R$ болғанда қатар абсолютті жинақталады.

$|x| > R$ болғанда қатар жинақталмайды.

$x = -R$ және $x = R$ нүктелеріндегі жинақталу әрқайсысы үшін жеке зерттеледі.

Жинақталу жиыны

$0 < R < \infty$ болғанда жинақталу жиынының мүмкін түрлері:

$$(-R, R), [-R, R], [-R, R), (-R, R]$$

$R = \infty$ болғанда қатар барлық $x \in \mathbb{R}$ үшін жинақталады.
$R = 0$ болғанда қатар тек $x = 0$ нүктесінде жинақталады.

Коши–Адамар формуласы

Егер $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ шегі бар болса,

$$R = \frac{1}{\tau}$$

$0 < \tau < \infty$ болса, $R = \frac{1}{\tau}$.

$\tau = 0$ болса, $R = \infty$. $\tau = \infty$ болса, $R = 0$.

Келісім: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$

Коши–Адамар формуласының жалпы түрі

$\sqrt[n]{|a_n|}$ тізбегінің кәдімгі шегі болмауы мүмкін. Бұл жағдайда жоғарғы шек қолданылады:

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,, \qquad R = \frac{1}{\tau}$$

$|x| < R$ болғанда $\sum a_n x^n$ қатары абсолютті жинақталады.

$|x| > R$ болғанда қатар жинақталмайды.

Ішкі сегментте бірқалыпты жинақталу

Жинақталу радиусы $R > 0$ болатын $\sum a_n x^n$ қатары берілсін. Әрбір $0 < r < R$ үшін қатар $[-r, r]$ сегментінде бірқалыпты жинақталады.

Демек, жинақталу интервалының ішінде жатқан кез келген тұйық сегментте бірқалыпты жинақталу бар.

Дәрежелік қатар қосындысының үзіліссіздігі

$$f(x) = \sum a_n x^n, \qquad -R < x < R, \qquad R > 0.$$

Әрбір $a_n x^n$ функциясы үзіліссіз. Қатар әрбір $[-r, r] \subset (-R, R)$ сегментінде бірқалыпты жинақталады.

Сондықтан $f(x)$ қосындысы $(-R, R)$ интервалының барлық нүктесінде үзіліссіз.

Абель теоремасы

$0 < R < \infty$ болсын. $\sum a_n x^n$ қатары $x = R$ нүктесінде жинақталсын. Онда $f(x) = \sum a_n x^n$ функциясы R нүктесінде сол жақтан үзіліссіз болады:

$$\lim_{x \to R-0} f(x) = \sum a_n R^n$$

Шекарадағы қатардың жинақталуы осы теореманың шарты.

Мүшелеп интегралдау

$f(x) = \sum a_n x^n$ қатарының жинақталу радиусы $R > 0$ болсын. Әрбір $0 < t < R$ үшін қатарды $[-t, t]$ сегментінде мүшелеп интегралдауға болады.

$$\int_0^t f(x)\,dx = a_0 t + (a_1/2)t^2 + (a_2/3)t^3 + \ldots$$

Жалпы мүшесі: $a_n t^{n+1}/(n+1), \quad n = 0, 1, \ldots$

Мүшелеп дифференциалдау

Жинақталу радиусы $R > 0$ және $f(x) = \sum a_n x^n$ болсын. Онда $f(x)$ функциясы $(-R, R)$ интервалының әрбір нүктесінде дифференциалданады.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

Туындылар қатары: $\sum n a_n x^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Жоғары ретті туындылар

$f(x) = \sum a_n x$ функцияс $(-R, R)$ интервалында ақырсыз рет дифференциалданады.

Кез келген $k = 1, 2, \ldots$ үшін

$$f^{(k)}(x) = \sum n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

Мұнда қосынды $n = k$-дан ∞-ке дейін алынады. Формула барлық $-R < x < R$ үшін орындалады.

Коэффициенттерді туындылар арқылы өрнектеу

$f(x) = \sum a_n x^n$ болсын. $x = 0$ нүктесінде

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k, \qquad a_k = f^{(k)}(0)/k!$$

Сондықтан

$$f(x) = \sum [f^{(k)}(0)/k!] x^k, \qquad |x| < R$$

Қосынды $k = 0$-ден ∞-ке дейін алынады, $0! = 1$.

Тейлор қатарының бірмәнділігі

f функциясы $(a - R, a + R)$ интервалында дәрежелік қатарға жіктелсін:

$$f(x) = \sum c_{\mathrm{n}}(x - a)^{\mathrm{n}}$$

Онда коэффициенттер бірмәнді анықталады:

$$c_{\mathrm{n}} = f^{(\mathrm{n})}(a)/n!$$

Демек, берілген дәрежелік қатар — f функциясының Тейлор қатары.

Тейлор қатарына жіктелудің жеткілікті шарты

f функциясы $(-\delta, \delta)$ интервалында ақырсыз рет дифференциалдансын, $0 < \delta \leq \infty$.

$A > 0, T > 0$ сандары табылып, барлық $|x| < \delta$ және $n \geq 1$ үшін

$$|f^{(n)}(x)| \leq AT^n n!$$

болсын. Онда $|x| < r = \min\{\delta, 1/T\}$ болғанда

$$f(x) = \sum [f^{(k)}(0)/k!]x^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.

2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.