Дәріс 11

ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР МЕН ҚАТАРЛАРДЫҢ БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ БЕЛГІЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ

Дәріс құрылымы

1. Вейерштрасс белгісі
2. Дирихле және Абель белгілері
3. Бірқалыпты жинақталу және үзіліссіздік
4. Шек пен қатар таңбасының ауыстырымдылығы
5. Функциялық қатарды мүшелеп интегралдау
6. Функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау

Негізгі белгілеулер

E жиынында анықталған функциялық қатар:

$$\sum f_n(x), \qquad n = 1, 2, \dots, \qquad x \in E$$

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

$S_n(x)$ — қатардың n-ші дербес қосындысы.
$f(x)$ — қатардың қосындысы.
Бұдан әрі $\sum$ таңбасы $n = 1$ -ден ∞-ке дейінгі қосындыны білдіреді.

Вейерштрасс белгісі

E жиынында $\sum f_n(x)$ функциялық қатары берілсін. Барлық $x \in E$ және $n \geq 1$ үшін

$$|f_n(x)| \leq c_n, \qquad c_n \geq 0, \qquad \sum c_n < \infty$$

болсын. Мұнда c_n сандары x айнымалысына тәуелсіз.
Онда $\sum f_n(x)$ қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Бірқалыпты шенелген тізбек

E жиынында $\{u_n(x)\}$ функциялық тізбегі берілсін. Егер $C > 0$ саны табылып, барлық n және $x \in E$ үшін

$$|u_n(x)| \leq C$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{u_n(x)\}$ тізбегі E жиынында бірқалыпты шенелген деп аталады.

C тұрақтысы n нөміріне де, x нүктесіне де тәуелсіз.

Дирихле белгісі

$$f_n(x) = a_n(x)b_n(x), \qquad x \in E, \qquad n \geq 1.$$

1. $A_n(x) = a_1(x) + \cdots + a_n(x)$ дербес қосындылары бірқалыпты шенелген: $|A_n(x)| \leq C$.
2. Әрбір $x \in E$ үшін $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \ldots \geq 0$.
3. $b_n(x)$ тізбегі E жиынында 0-ге бірқалыпты жинақталады.

Онда $\sum a_n(x)b_n(x)$ қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Абель белгісі

$f_n(x) = a_n(x)b_n(x), \qquad x \in E, \qquad n \geq 1.$

1. $\sum a_n(x)$ қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.
2. Әрбір $x \in E$ үшін $\{b_n(x)\}$ сандық тізбегі монотонды.
3. $\{b_n(x)\}$ тізбегі E жиынында бірқалыпты шенелген:

$|b_n(x)| \leq M,$ барлық $n \geq 1$ және $x \in E$ үшін.

Онда $\sum a_n(x)b_n(x)$ қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Бірқалыпты жинақталу мен үзіліссіздік

Теорема. Егер әрбір $f_n(x)$ функциясы E аралығында үзіліссіз және $\sum f_n(x)$ қатары E аралығында $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталса, онда қатардың $f(x)$ қосындысы E аралығында үзіліссіз болады.

Дини теоремасы

$[a, b]$ сегментінде $\sum f_{\mathrm{n}}(x)$ қатары $f(x)$ функциясына нүктелі жинақталсын.

1. $f(x)$ және барлық $f_{\mathrm{n}}(x)$ функциялары $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз.

2. Барлық $x \in [a, b]$ және $n \geq 1$ үшін $f_{\mathrm{n}}(x) \geq 0$.

Онда $\sum f_{\mathrm{n}}(x)$ қатары $[a, b]$ сегментінде бірқалыпты жинақталады.

Шек пен қатар таңбасының ауыстырымдылығы

a — E жиынының шектік нүктесі болсын.

1. $\sum f_n(x)$ қатары E жиынында $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталады.
2. Әрбір n үшін $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = c_n \in \mathbb{R}$.
3. $\sum c_n$ қатары жинақталады және оның қосындысы c.

Онда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ және

$$\lim_{x\to a} \sum f_n(x) = \sum \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Үзіліссіз функциялар қатарын интегралдау

1. Әрбір $f_n(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз.

2. $\sum f_n(x)$ қатары $[a, b]$ сегментінде $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталады.

Онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде интегралданады және қатарды мүшелеп интегралдауға болады:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx.$$

Интегралданатын функциялар қатары

1. Әрбір $f_n(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде Риман бойынша интегралданады.
2. $\sum f_n(x)$ қатары $[a,b]$ сегментінде $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталады.

Онда $f(x)$ функциясы да интегралданады және

$$\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx.$$

Мүшелеп дифференциалдау

1. Әрбір $f_n(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз дифференциалданады.
2. $\sum f_n(x)$ қатары $[a,b]$ сегментінде $f(x)$ функциясына нүктелі жинақталады.
3. $\sum f_n'(x)$ туындылар қатары $[a,b]$ сегментінде бірқалыпты жинақталады.

$$f'(x) = (\sum f_n(x))' = \sum f_n'(x)$$

Бір нүктеде жинақталу жеткілікті болатын жағдай

1. Әрбір $f_n(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде дифференциалданады.
2. $\sum f_n(x)$ қатары кемінде бір $x_0 \in [a, b]$ нүктесінде жинақталады.
3. $\sum f_n'(x)$ қатары $[a, b]$ сегментінде бірқалыпты жинақталады.

Онда $\sum f_n(x)$ қатары $[a, b]$-де бірқалыпты жинақталады. Оның $f(x)$ қосындысы дифференциалданады.

$$f'(x) = \sum f_n'(x), \qquad x \in (a, b).$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.

2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.