EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 10

ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР МЕН ҚАТАРЛАР НҮКТЕЛІ ЖӘНЕ БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ

Дәріс құрылымы

1. Функциялық тізбек және оның нүктелі шегі
2. Функциялық қатар және оның қосындысы
3. Нүктелі және бірқалыпты жинақталу
4. Бірқалыпты жинақталудың Коши критерийлері
5. Нүктелі және бірқалыпты жинақталудың арақатынасы
6. Супремум арқылы берілетін критерий

Функциялық тізбектің анықтамасы

$E \subset \mathbb{R}$ жиыны берілсін. Әрбір $n \in \mathbb{N}$ санына E жиынында анықталған $f_n(x)$ функциясы сәйкес қойылсын. Осы сәйкестік E жиынында анықталған **функциялық тізбек** деп аталады.

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots , \qquad x \in E$$

Қысқаша белгіленуі: $\{f_n(x)\},\ n = 1, 2, \dots$

Нүктелі шек

Әрбір бекітілген $x_0 \in E$ нүктесінде $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots$ сандық тізбегі анықталады. Егер әрбір $x \in E$ үшін осы тізбектің ақырлы шегі бар болса, $\{f_n(x)\}$ тізбегі E жиынында нүктелі жинақталады.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in E$$

$f(x)$ функциясы **шектік функция** немесе **нүктелі шек** деп аталады.

Нүктелі жинақталудың анықтамасы

$\{f_n(x)\}$ тізбегі E жиынында $f(x)$ функциясына нүктелі жинақталсын.
Әрбір $\varepsilon > 0$ және әрбір $x \in E$ үшін $N = N(\varepsilon, x)$ табылып, барлық $n \geq N$ болғанда

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады.

N нөмірі ε санына да, x нүктесіне де тәуелді болуы мүмкін.

Функциялық қатар

E жиынында $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбегі берілсін.

$$f_1(x) + f_2(x) + \ \dots \ + f_n(x) + \ \dots = \sum f_n(x)$$

Бұл өрнек **функциялық қатар** деп аталады.

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ \dots \ + f_n(x)$$

$S_n(x)$ — қатардың n-ші дербес қосындысы.
Мұнда және бұдан әрі $\sum$ қосындысы $n = 1$ -ден ∞-ке дейін алынады.

Функциялық қатардың нүктелі жинақталуы

Егер $\{S_n(x)\}$ дербес қосындылар тізбегі E жиынында нүктелі жинақталса, $\sum f_n(x)$ қатары да нүктелі жинақталады.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum f_n(x)$$

$f(x)$ функциясы қатардың қосындысы, нүктелі қосындысы немесе шектік функциясы деп аталады.

Нүктелі жинақталатын тізбекке мысал

$E = [0,1]$ жиынында келесі тізбекті қарастырайық:

$$f_n(x) = 1, \qquad \text{егер } 0 < x \leq \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = 0, \qquad \text{егер } x = 0 \text{ немесе } \frac{1}{n} < x \leq 1.$$

$x = 0$ үшін барлық $f_n(0) = 0$. Бекітілген $x > 0$ үшін $n > \frac{1}{x}$ болғанда $f_n(x) = 0$.

Демек, $f_n(x)$ тізбегі $[0,1]$-де $f(x) \equiv 0$ функциясына нүктелі жинақталады.

Мысалдағы нөмірдің x нүктесіне тәуелділігі

$0 < \varepsilon < 1$ және $x \in (0,1]$ болсын. Бұл жағдайда $|f_n(x) - 0| < \varepsilon \leftrightarrow n > \frac{1}{x}$
x нүктесі 0-ге жақындаған сайын қажетті n нөмірі өседі.

$$\sup\{\frac{1}{x} : x \in (0,1]\} = +\infty$$

Барлық $x = \in [0,1]$ үшін жарамды бір ғана N нөмірі жоқ.

Бірқалыпты жинақталудың анықтамасы

Әрбір $\varepsilon > 0$ үшін x нүктесіне тәуелсіз $N = N(\varepsilon)$ табылып, барлық $n \geq N$ және барлық $x \in E$ үшін

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, $\{f_n(x)\}$ тізбегі E жиынында $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталады.

Негізгі ерекшелігі: N нөмірі барлық $x \in E$ үшін ортақ.

Анықтамалардағы кванторлардың реті

Нүктелі жинақталу:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists N = N(\varepsilon, x) \quad \forall n \geq N: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Бірқалыпты жинақталу:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall x \in E \quad \forall n \geq N: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Функциялық тізбек үшін Коши критерийі

$\{f_n(x)\}$ тізбегінің E жиынында бірқалыпты жинақталуы үшін төмендегі шарттың орындалуы қажетті де жеткілікті:

Әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$ табылып, барлық $m, n \geq N$ және барлық $x \in E$ үшін

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Бұл критерийде шектік функцияны алдын ала білу талап етілмейді.

Бірқалыпты жинақталмаудың Коши шарты

$\{f_n(x)\}$ тізбегі E жиынында бірқалыпты жинақталмауы үшін төмендегі шарттың орындалуы қажетті де жеткілікті:

Қандай да бір $\varepsilon_0 > 0$ табылып, кез келген N үшін $x \in E$ нүктесі мен $m, n \geq N$ нөмірлерін

$$|f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon_0$$

теңсіздігі орындалатындай етіп таңдауға болады.

Функциялық қатар үшін Коши критерийі

$\sum f_n(x)$ қатары E жиынында бірқалыпты жинақталуы үшін төмендегі шарттың орындалуы қажетті де жеткілікті:

Әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$ табылып, барлық $n \geq m \geq N$ және барлық $x \in E$ үшін

$$|f_m(x)| + f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Қатардың соңғы бөліктері барлық x үшін бірдей кіші болады.

Нүктелі және бірқалыпты жинақталудың арақатынасы

Теорема. Бірқалыпты жинақталатын функциялық тізбек те, қатар да әрқашан нүктелі жинақталады.

Нүктелі жинақталатын тізбек немесе қатар бірқалыпты жинақталмауы мүмкін.

Салдар. Бірқалыпты жинақталатын тізбектің бірқалыпты шегі оның нүктелі шегімен сәйкес келеді.

Супремум арқылы берілетін критерий

$f_n(x)$ тізбегі E жиынында $f(x)$ функциясына нүктелі жинақталсын. Белгілеу енгізейік:

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\}.$$

Онда $\{f_n(x)\}$ тізбегі E жиынында $f(x)$-ке бірқалыпты жинақталуы үшін

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0$$

Критерийді дәрістегі мысалға қолдану

$f_n(x) = 1$, егер $0 < x \le \frac{1}{n}$, ал қалған нүктелерде $f_n(x) = 0$.

Нүктелі шек: $f(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1]$.

Әрбір n үшін $x_n = \frac{1}{2n} \in [0,1]$ және $f_n(x_n) = 1$.

$$M_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} = 1$$

M_n нөлге ұмтылмайды. Бірқалыпты жинақталу жоқ.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. Алматы: Мектеп, 1987. 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.