Дәріс 9

АЙНЫМАЛЫ ТАҢБАЛЫ МҮШЕЛІ ҚАТАРЛАР. ҚАТАРЛАРДЫ КӨБЕЙТУ

Дәріс құрылымы

1. Қатар мүшелерінің таңбалары

2. Коши критерийі және оның салдарлары

3. Абель түрлендіруі

4. Жинақталу белгілері және Лейбниц теоремасы

5. Абсолютті жинақталу

6. Коши көбейтіндісі және Мертенс теоремасы

7. Қатарлар көбейтіндісінің жалпы анықтамасы

Қатар мүшелерінің таңбалары

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сандық қатар үшін келесі үш жағдайдың біреуі ғана орындалады:

1) Мүшелерінің бәрі теріс емес немесе бәрі оң емес.
2) Оң және теріс мүшелері бар, бірақ олардың бір таңбалы бөлігінің мүшелер саны ақырлы.
3) Оң таңбалы мүшелері де, теріс таңбалы мүшелері де ақырсыз көп.

Жалпы жағдайдағы Коши критерийі

Теорема. Сандық қатар жинақталуы үшін әрбір $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $k\varepsilon$ нөмірі табылып,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_\varepsilon : \quad k_\varepsilon \le p \le q$$

шартын қанағаттандыратын барлық p және q үшін

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| < \varepsilon$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті де жеткілікті.

Коши критерийінің салдарлары

1-салдар. Егер сандық қатар жинақталса, онда оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2-салдар. Қатар жинақталмауы үшін

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, k \quad \exists\, q_k \geq p_k \geq k$$

болып, мына теңсіздіктің орындалуы қажетті де жеткілікті:

$$\left| \sum_{n=p_k}^{q_k} a_n \right| \geq \varepsilon_0$$

Абель түрлендіруі

$\{a_n\}$ және $\{b_n\}$ тізбектері берілсін. Белгілейік:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad A_{-1} = 0$$

Онда кез келген $0 \le p \le q$ үшін

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

Бұл теңдік **Абель түрлендіруі** деп аталады.

Көбейтінді түріндегі қатардың жинақталуы

Теорема. $c_n = a_n b_n$ болсын. Егер төмендегі шарттар орындалса:

1) $\sum a_n$ қатарының дербес қосындылары шенелген.
2) $\{b_n\}$ тізбегі өспейтін.
3) $b_n \to 0$.

$$|A_n| \le M, \qquad b_0 \ge b_1 \ge \cdots \ge b_n \ge \cdots$$

Онда $\sum a_n b_n$ қатары жинақталады.

Лейбниц теоремасы

Салдар. $\{b_n\}$ тізбегі өспейтін болып, нөлге ұмтылсын:

$$b_0 \ge b_1 \ge \cdots \ge 0, \qquad b_n \to 0$$

Онда таңбалары кезектесетін

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots$$

қатары жинақталады.

Абель белгісі

Теорема. $c_n = a_n b_n$ болсын. Егер

a) $\sum a_n$ қатары жинақталса,

b) $\{b_n\}$ тізбегі монотонды болса,

c) $\{b_n\}$ тізбегі шенелген болса,

$$|b_n| \leq c \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

онда $\sum c_n = \sum a_n b_n$ қатары жинақталады.

Абсолютті жинақталу

Анықтама. Егер $\sum a_n$ қатарының әр мүшесін абсолютті шамасымен алмастырғанда пайда болатын

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

қатары жинақталса, онда $\sum a_n$ қатары абсолютті жинақталады деп аталады.

Теорема. Абсолютті жинақталатын қатар жинақталады.

Абсолютті жинақталу және Коши критерийі

Үшбұрыш теңсіздігі бойынша

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| \le \sum_{n=p}^{q} |a_n|$$

$\sum |a_n|$ қатары жинақталғанда оң жақтағы қосындыны жеткілікті үлкен p және q үшін қалағанымызша кішірейтуге болады.

Сондықтан $\sum a_n$ қатары да Коши критерийін қанағаттандырады және жинақталады.

Қатарлардың Коши көбейтіндісі

Екі сандық қатар берілсін:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Олардың Коши көбейтіндісінің алғашқы мүшелері:

$$c_0 = a_0 b_0, \qquad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

Жалпы мүшесі:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Мертенс теоремасы

Теорема. Екі жинақталатын қатардың кемінде біреуі абсолютті жинақталса, олардың Коши көбейтіндісі жинақталады.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Көбейтінді қатардың қосындысы көбейткіш қатарлардың қосындыларының көбейтіндісіне тең:

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$$

Көбейтіндінің жалпы анықтамасы

Теріс емес бүтін сандар жұптарының жиынын қарастырайық:

$$\Omega = \{(n, m) : n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Ω жиынын ақырлы Ω_k жиындарына бөлейік. Олар өзара қиылыспайды және бірігуі Ω жиынын береді:

$$k_1 \neq k_2 \quad \Longrightarrow \quad \Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \varnothing$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k$$

Жалпы көбейтінді қатар

Таңдалған $\{\Omega_k\}$ бөлуіне сәйкес жалпы мүшені анықтаймыз:

$$\widetilde{c}_k = \sum_{(n,m)\in\Omega_k} a_n b_m$$

Яғни Ω_k жиынына кіретін барлық (n, m) жұптарына сәйкес $a_n b_m$ көбейтінділерін қосамыз.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k$$

Осы қатар берілген бөлуге сәйкес көбейтінді деп аталады.

Коши көбейтіндісі жалпы анықтамада

Егер жұптарды индекстерінің қосындысы бойынша топтасақ,

$$\Omega_k = \{(n,m) : n+m=k\}$$

онда жалпы анықтама Коши көбейтіндісін береді:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. Алматы: Мектеп, 1987. 288 бет.

2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.

3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 24-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 624 с.

5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах. Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. 133 с.