15-дәріс

ШЕНЕЛМЕГЕН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРЫ

Шенелмеген функцияның, аралықтағы интегралының анықтамасы. $f(x)$ функциясы $[a,b)$ аралығында анықталып, $a<c<b$ теңсіздігін қанағаттандыратын әр c нақты саны үшін $[a,c]$ сегментінде Риман бойынша интегралданып, (c,b) интервалында шенелмеген болсын. Егер де $S(c)=\int_a^c f(x)dx$, функциясының сол жақты

$$\lim_{c\to b-0} S(c) \tag{1}$$

нақты мәнді шегі бар болса, онда $f(x)$ функциясы $[a,b)$ аралығында меншіксіз ингегралданады дейді де, сол шектің (нақты санның) өзін $f(x)$ функциясының $[a,b)$ аралығындағы меншіксіз интегралы деп атап,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{b-0} f(x)dx \tag{2}$$

символымен белгілейді. Бұл жағдайда "*(2) интегралы жинақталады*" деп те айтады.

Қалған жағдайларды, яғни (1) шегі бар және ақырсыз, яғни $+\infty$, $-\infty$ не ∞-тің бірі болғанда не $c\to b-0$ болғанда $S(c)$ функциясының ешқандайда шегі болмаса, (2) интегралы *жинақсыз не жинақталмайды* дейді.

Егерде (2) интегралы жинақсыз болып, $\lim_{c\to b-0} S(c)$ ақырсыз шегі бар болса, онда сол шектің $+\infty$, $-\infty$ не ∞ болуына қарай сәйкес

$$\int_a^b f(x)dx=+\infty,\ \int_a^b f(x)dx=-\infty,\ \int_a^b f(x)dx=\infty \tag{3}$$

түрінде жазылады. Әрине (3) белгілеулері жинақталмайтын интеграл *қалай* жинақталмайтынын көрсетеді.

Шенелмеген функцияның меншіксіз интегралының жинақталуы. Жапы жағдайда жинақталу критерийі мынадай болады:

$\int_a^{b-0} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақталуы үшін әр $\varepsilon>0$ саны бойынша $b-\delta(\varepsilon)<c_1<c_2<b$ болған сайын

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылуы қажетті де жеткілікті.

Егер де әр $a < c < b$ үшін $f(x)$ функциясы $[a,c]$ сегментінде Риман бойынша интегралданып, $\int_a^b |f(x)|dx \equiv \int_a^{b-0} |f(x)|dx$ интегралы жинақталса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралы *абсолютті жинақталады* дейді. Абсолютті жинақталатын интеграл жинақталып, жинақталатын интеграл абсолютті жинақталмауы мүмкін.

Риман интегралының бас мәні. $a < d < b$ нақты сандары беріліп, $f(x)$ функциясы $a \le x \le b,\ x \ne d$ жиынында анықталып, $a < c_1 < d < c_2 < b$ болатындай әр c_1 және әр c_2 үшін $f(x)$ функциясы $[a,c_1]$ және $[c_2,b]$ сегменттерінде Риман бойынша интегралдансын. Онда (1) анықтамасына сай $f(x)$ функциясы (a,b) аралығында меншіксіз интегралдануы

$$\lim_{c_1 \to d-0} \int_a^{c_1} f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to +0} \int_a^{d-\delta_1} f(x)dx \tag{4}$$

және

$$\lim_{c_2 \to d+0} \int_{c_2}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta_2 \to +0} \int_{d+\delta_2}^{b} f(x)dx \tag{5}$$

нақты мәнді шектері бар болуымен пара-пар. Сөйтіп,

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\delta_1 \to 0} \int_a^{d-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2 \to 0} \int_{d+\delta_2}^{b} f(x)dx =$$

әр қосылғыш бір ғана айнымалыға тәуелді болғандықтан, бұл анықтаманың оң жағындағы өрнекті былай да көшіруге болады

$$= \lim_{\substack{\delta_1 \to +0 \\ \delta_2 \to +0}} \left[\int_a^{d-\delta_1} f(x)dx + \int_{d+\delta_2}^{b} f(x)dx \right], \tag{6}$$

.

Сонымен бірге, δ_1 мен δ_2 нөлге бірінен-бірі тәуелсіз өзінше ұмтылғанда (6) шегі бар боламаса да (бұл (4) және (5) шектерінің кемінде бірі ақырлы болмауымен пара-пар), δ_1 мен δ_2 өзара тең, яғни $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ болып, нөлге ұмтылғанда (6) шегі, яғни

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int_a^{d-\delta} f(x)dx+\int_{d+\delta}^{b} f(x)dx\right] \tag{7}$$

нақты мәнді шегі бар болуы да мүмкін. Мәселен, $f(x)=\frac{1}{x}$ үшін $a=-1,\ b=1,\ d=0$ болғанда

$$\int_{-1}^{-\delta_1}\frac{1}{x}dx+\int_{-\delta_2}^{1}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_{-1}^{-\delta_1}+\ln|x|\Big|_{\delta_2}^{1}=\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}$$

болып, δ_1 мен δ_2 біріне-бірі тәуелсіз нөлге ұмтылғанда ешқайда да ұмтылмайды: мәселен, $\delta_1=\delta^2,\delta_2=\delta$ болғанда $\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}=\ln\delta\to-\infty\ (\delta\to+0)$, ал $\delta_1=e\delta,\delta_2=\delta$ болғанда $\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}=\ln e=1\to 1\ (\delta\to+0)$. Сонымен қатар $\delta_1=\delta_2=\delta$ болғанда

$$=\lim_{\delta\to+0}\left[\int_{-1}^{-\delta}\frac{1}{x}dx+\int_{\delta}^{1}\frac{1}{x}dx\right]=\lim_{\delta\to+0}\ln\frac{\delta}{\delta}=\lim_{\delta\to+0}0=0.$$

Осыған сүйеніп мынадай анықтама қабылдайық: *егер де (7) нақты мәнді шегі бар болса, онда сол шекті, Коши ұсынғандай, бас мәні мағынасындағы интеграл деп атайды да,*

$$V.P.\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

деп белгілейді.

Коши теңсіздігі.

1-теорема. *$a<b$ нақты сандары беріліп, $f(x)$ және $g(x)$ функциялары $[a,b]$ сегментінде анықталып, сол сегментте Риман бойынша интегралдансын. Онда*

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right|\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

теңсіздігі орнындалады.

2-теорема. *Егер де $f(x)$ және $g(x)$ функциялары $[a,+\infty)$ аралығында анықталып және де әр $a<A<\infty$ үшін $[a,A]$ сегментінде Риман бойынша интегралданып, $f^2(x)$ және $g^2(x)$ функциялары $[a,+\infty)$ аралығында меншіксіз интегралданса, онда $f(x)\cdot g(x)$ көбейтіндісі де $[a,+\infty)$ аралығында меншіксіз абсолютті интегралданып,*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \left(\int_a^{+\infty} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^{+\infty} g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

теңсіздігі орнылалады.

***3-теорема**. Егер де $f(x)$ және $g(x)$ функциялары $[a,b)$ аралығында анықталып және де әр $a<c<b$ үшін $[a,c]$ сегментінде Риман бойынша интегралданып, $f^2(x)$ және $g^2(x)$ функциялары $[a,b)$ аралығында меншіксіз интегралданса, онда $f(x)\cdot g(x)$ көбейтіндісі де $[a,b)$ аралығында меншіксіз абсолютті интегралданып,*

$$\left|\int_a^{b-0} f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \left(\int_a^{b-0} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^{b-0} g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

теңсіздігі орындалады.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.