13-дәріс

ШЕНЕЛМЕГЕН АРАЛЫҚТАҒЫ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР: НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ, ТЕРІС ЕМЕС ФУНКЦИЯЛАР ҮШІН ЖИНАҚТАЛУ КРИТЕРИЙІ ЖӘНЕ САЛЫСТЫРУ ТЕОРЕМАСЫ

a нақты бір саны беріліп, $f(x)$ функциясы $[a;+\infty)$ шенелмеген аралығында анықталып, $a < A < +\infty$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын әр A нақты саны үшін $[a;A]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын. Онда, әрине, әр A санына $S(A) := \int_a^A f(x)dx$ санын сәйкес қоятын тәртіп $(a;+\infty)$ аралығында $S(A)$ функциясын анықтайды.

Егер де $\lim\limits_{A\to+\infty} S(A) = M$ нақты мәнді шегі бар болса, онда $f(x)$ функциясы $[a;+\infty)$ аралығында Риман бойынша интегралданады деп, ал M санының өзін сол функцияның меншіксіз интегралы деп атап, оны

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{1}$$

символымен белгілейді. Бұл жағдайда *“(1) интегралы жинақталады”* деп те айтады.

Сөйтіп, (1) интегралының *жинақталуы* не $f(x)$ функциясының $[a;+\infty)$ аралығында интегралдануы

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \in (-\infty;+\infty) \tag{2}$$

шарты орындалуымен пара-пар. Қалған жағдайларда, яғни $S(A)$ интегралының $A\to+\infty$ болғанда $+\infty, -\infty$ не ∞ болатын ақырсыз шектері бар не ешқандай да шегі болмағанда, (1) интегралы *жинақсыз* не *жинақталмайды* дейді.

Егер де (1) интегралы жинақсыз болып, $\lim\limits_{A\to+\infty} S(A)$ ақырсыз шегі бар болса, онда сол шектің $+\infty,-\infty$ не ∞ болуына қарай сәйкес

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty,\ \int_a^{+\infty} f(x)dx = -\infty,\ \int_a^{+\infty} f(x)dx = \infty \tag{3}$$

деп жазады. (3) белгілеулері (1) интегралының жинақталмауы туралы мәліметке қоса *қалай* жинақталмайтынын көрсетеді.

1-*мысал.* Әрбір α нақты саны үшін $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}\equiv x^{-\alpha}$ дәрежелік функциясының $[1,+\infty)$ ақырсыз аралығындағы меншіксіз интегралының жинақталуын не жинақталмауын анықтауымыз қажет.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx \tag{4}$$

Егер де $\alpha\neq 1$ болса, онда $A>1$ үшін

$$S(A):=\int_1^A\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^A=\frac{1}{1-\alpha}\left[A^{1-\alpha}-1\right],$$

бұдан $\alpha>1$, яғни $1-\alpha<0$ болғанда $\lim\limits_{A\to+\infty}S(A)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ болып, $\alpha<1$, яғни $1-\alpha>0$ болғанда $\lim\limits_{A\to+\infty}S(A)=+\infty$ болатынын көреміз. Ал $\alpha=1$ болғанда

$$S(A):=\int_1^A\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^A=\ln A\to+\infty\left(A\to+\infty\right).$$

Сондықтан қабылданған анықтамалар бойынша, (4) интегралы $\alpha>1$ болғанда жинақталып,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}$$

теңдігі орындалады да, әр $\alpha\le 1$ үшін $(+\infty-$*ке* тең болып) жинақталмайды:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=+\infty.$$

Меншіксіз интегралдың $(-\infty,b]$ аралығындағы анықтамасы. Енді b нақты саны беріліп, $f(x)$ функциясы $(-\infty;b]$ аралығында анықталып, $-\infty<B<b$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын әр B нақты санына $S(B):=\int\limits_B^b f(x)dx$ нақты санын сәйкес қоятын $S(B)$ функциясы анықталған болсын. Бұл жағдайда, әрине, $S(B)$ фунцияның шегі $B\to-\infty$ болғанда қарастырылады: егер де

$$\lim_{B\to-\infty}S(B)=\lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)dx=:L\in(-\infty,+\infty)$$

нақты мәнді шегі бар болса, онда $f(x)$ функциясы $(-\infty;b]$ аралығында интегралданады деп, L санын сол функцияның *меншіксіз интегралы* деп атап,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

символымен белгілейді.

Шенелмеген аралықтың үшінші түрі болып табылатын $(-\infty;+\infty)$ аралығындағы меншіксіз интеграл. Егер де $(-\infty;+\infty)$ аралығында анықталған $f(x)$ функциясы әр $[B;A]$ сегментінде Риман бойынша интегралданып, қайсыбір $-\infty < a < +\infty$ үшін

$$L = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \text{ және } M = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

меншіксіз интегралдарының (әр жағдайға сәйкесті нақты мәнді шектердің) әрқайсысы бар болса, онда $f(x)$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ жиынында интегралданады деп, $L+M$ нақты санын оның меншіксіз интегралы деп атап, сол санды

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

символымен белгілейді.

Меншіксіз интегралдардың (сандық қатар жағдайына ұқсас) кейбір қасиеттері.

1^0. Егер де $[a;+\infty)$ аралығында анықталған $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары үшін $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ меншіксіз интегралдары бар болса, онда әр c_1 және c_2 нақты сандары үшін $f(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ функциясы сол аралықта интегралданып,

$$\int_a^{+\infty}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]dx = c_1\int_a^{+\infty} f_1(x)dx + c_2\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$$

теңдігі орындалады.

2^0. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақталуы үшін оның әр қалдық интегралы, яғни $R>a$ болғандағы $\int_R^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақталуы қажетті де жеткілікті және олар жинақталған жағдайда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^R f(x)dx + \int_R^{+\infty} f(x)dx$$

теңдігі орындалады. (13) теңдігін меншіксіз интегралдың аддитивтік қасиеті деп атайды.

Теріс емес функцияның меншіксіз интегралының (тағы да теріс емес мүшелі сандық қатарға сәйкес) жинақталуының критерийі. $[a,+\infty)$ *аралығында анықталған* $f(x)$ *функциясы сол жиында теріс емес болсын, яғни әр* $x\in[a,+\infty)$ *үшін* $f(x)\geq 0$ *теңсіздігі орындалсын. Онда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интегралы жинақталуы үшін $S(A)=\int_a^A f(x)dx$ *функциясы* $(a,+\infty)$ *интервалында шенелген функция болуы қажетті де жеткілікті.*

Салыстыру теоремасы. $[a,+\infty)$ *аралығында* $f(x)$ *және* $g(x)$ *функциялары анықталып, қайсыбір* $R\geq a$ *саны үшін* $R\leq x<+\infty$ *болғанда* $0\leq f(x)\leq g(x)$ *болсын. Онда* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *интегралы жинақталса,* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *интегралы да жинақталады, ал* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *интегралы жинақталмаса,* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *интегралы да жинақталмайды.*

С а л д а р. *Егерде барлық* $a\leq x<+\infty$ *үшін* $f(x)\geq 0$, $g(x)>0$ *болып,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=:k \qquad (0\leq k\leq\infty)$$

шегі бар болса, онда k *ақырлы, яғни* $0\leq k<+\infty$ *болғанда* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *интегралының жинақталуынан* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *-тің интегралдануы шығады, ал* k *оң сан не* $+\infty$*, яғни* $0<k\leq+\infty$ *болғанда* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *интегралының жинақталмауынан* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *интегралының жинақталмауы шығады.*

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.