12-дәріс

ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАРЛАР

$a_0, a_1, ..., a_n ...$ сандық тізбегі бойынша соны жалғастыра мынадай қатар (ақырсыз қосынды) құрайық:

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (1)$$

Бұл функциялық қатардың әр мүшесі $f_n(x) = a_n x^n$ дәрежелік функциясы болғандықтан, *дәрежелік қатар* деп аталады. Кез келген дәрежелік қатар $E = (-\infty, +\infty)$ жиынында анықталғанын атап өтейік (өйткені мүшесі болатын әр дәрежелік функция сондай). Расында дәрежелік қатар деп (1) қатардағы x дәрежесінің орнына $x - x_0$ (x_0 –нақты сан) дәрежелері арқылы жалпыланған түріаталады:

$$a_0 + a_1 (x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n + ... \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

бірақ ол $x - x_0 = t$ ауыстыруы арқылы (1) түріне оңай келтірілетін болғандықтан, тек жазуларды ықшамдау мақсатымен ғана (1) түріндегі қатарлармен шектелеміз.

Ал дәрежелік қатар жағдайына келсек, онда олардың жинақталу жиыны кездейсоқ емес мынадай арнайы түрде болады екен: $0 \le R < +\infty$ үшін

(-R,R), [-R,R], [-R,R) , *(-R,R]* не $(-\infty, +\infty)$.

1-теорема. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *дәрежелік қатары беріліп,* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \tau$ *шегі бар болсын.*

Егер $0 < \tau < +\infty$ *болса, онда* $R = 1/\tau$, $\tau = 0$ *болғанда* $R = +\infty$, *ал* $\tau = +\infty$ *болғанда* $R = 0$ *болсын (қысқаша* $\frac{1}{0} := +\infty, \frac{1}{+\infty} := 0$ *деп келіссек, барлық жағдайда* $R = 1/\tau$ *болады). Онда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *қатары*

1) $0 < \tau < +\infty$, *яғни* $0 < R < +\infty$ *болғанда әр* $x \in (-R, R)$ *үшін абсолютті жинақталып, барлық* $x \in (-\infty, R)$ *және барлық* $x \in (R, +\infty)$ *нүктелерінде жинақталмайды,*

2) $\tau = 0$, *яғни* $R = +\infty$ *болса, онда әр* $x \in (-\infty, +\infty)$ *нүктесінде жинақталады,*

3) $\tau = +\infty$, *яғни* $R = 0$ *болғанда* $x = 0$ *нүктесінде жинақталып (өйткені,* $a_0 + 0 + ... + 0 + ...$ *қатарына айналады),* $|x| > R = 0$ *теңсіздігін қанағаттандыратын әр х нүктесінде жинақталмайды.*

Бұндағы $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ *теңдігін Коши-Адамар формуласы, R санын жинақталу радиусы,* $(-R, R)$ *жиынын жинақталу интервалы деп атайды.*

2-теорема. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *дәрежелік қатары беріліп,* $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ *болсын. Онда R=1/ τ үшін* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *қатары* $|x| < R$ *болғанда жинақталып,* $|x| > R$ *болғанда жинақталмайды .*

Дәрежелік қатардың жинақталу интервалында іштей жатқан кез келген сегментте бірқалыпты жинақталуы мен жинақталу интервалының өзінде қосындысының үзіліссіздігі.

3-теорема. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *дәрежелік қатары беріліп,* $R \equiv \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} > 0$ *болсын. Онда*

1) әр $0 < r < R$ *үшін* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *қатары [-r,r] сегментінде бірқалыпты жинақталады,*

2) (-R,R) интервалында $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *функциясы үзіліссіз болады.*

4-теорема (Абель теоремасы). *Жинақталу радиусы* R $(0 < R < \infty)$ *оң нақты саны болатын* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *қатары* $x = R$ *нүктесінде жинақталсын. Онда* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *функциясы (бұл, әрине, кемінде* $(-R, R)$ *аралығында анықталған)* $x = R$ *нүктесінде үзіліссіз, яғни*

$$\lim_{x\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

Дә***режелік қатар қосындысының жинақталу аралығында іштей жатқан кез келген сегментте интегралдануы мен жинақталу интервалында дифференциалдануы.*** *Жинақталу радиусы* $R > 0$ *болатын*

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *қатары берілсін. Онда әр* $0 < t < R$ *үшін* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *қатарын* $[-t, t]$ *сегментінде мүшелеп интегралдауға болады, мәселен,*

$$\int_0^t f(x)dx = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} t^n + \ldots$$

6 - т е о р е м а . *Жинақталу радиусы* $R > 0$ *болатын* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *қатары берілсін. Егер* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(-R < x < R)$ *болса, онда* $(-R, R)$ *интервалының әр x нүктесінде* $f(x)$ *функциясы дифференциалданып,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

теңдігі орындалады.

1 - с а л д а р . *Жинақталу радиусы* $R > 0$ *саны болатын* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *дәрежелік қатарының қосындысы* $f(x)$ *болсын. Онда әр* k $(k = 1,2,\ldots)$ *саны үшін* $f(x)$ *функциясының әр* $x \in (-R, R)$ *нүктесінде* k *-ретті* $f^{(k)}(x)$ *туындысы бар болып,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad (-R < x < R)$$

теңдігі орындалады.

2-салдар. *1-салдар жағдайында әр* $k = 0,1,\ldots$ *үшін*

$$f^{(k)}(0) = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot a_k = k! a_k \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

болады, демек,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (-R < x < R).$$

7- теорема. $f(x)$ *функциясы* $(a - R, a + R)$ $(0 < R \le +\infty)$ *интервалында ақырсыз рет дифференциалдансын. Егер қайсыбір* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *дәрежелік*

қатары мен барлық $x \in (a-R, a+R)$ *үшін* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *теңдігі орындалса, онда бұл дәрежелік қатар міндетті түрде* $f(x)$ *функциясың Тейлор қатары болады.*

8-теорема. $f(x)$ *функциясы қайсыбір* $(0 < \delta \leq +\infty)$ *үшін* $(-\delta, \delta)$ *интервалында ақырсыз рет дифференциалдансын. Егер қайсыбір A және T оң сандары мен барлық* $|x| < \delta$ *нүктелері және* $n (n = 1,2,...)$ *нөмірлері үшін*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq AT^n n!$$

болса, онда барлық $|x| < r = \min\left[\delta; T^{-1}\right]$ *үшін*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k .$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.