11-дәріс

ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР МЕН ҚАТАРЛАРДЫҢ БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ БЕЛГІЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ

Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақталуының Вейерштрасс белгісі. *E жиынында анықталған*

$$f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

функциялық қатар мүшелері үшін әр $x \in E$ *мен n=1,2,… үшін* $|f_n(x)| \le c_n$ *теңсіздігі орындалып,* $c_1 + \ldots + c_n + \ldots$ *сандық қатары (әрине, теріс емес мүшелі) жинақталсын. Онда (9) қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.*

Функциялық қатардың бірқалыпты жинақталуының Дирихле және Абель белгілері.

E жиынында $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі берілсін. Егер қайсыбір *c* оң саны мен барлық *n* (*n*=0, 1, 2, …) және $x \in E$ үшін, $|\varphi_n(x)| \le c$ болса, онда $\{\varphi_n(x)\}$ тізбегі *E* жиынында *бірқалыпты шенелген* дейді. Әрине, бұнда «бірқалыпты» деген сөз *c* санының $x \in E$ айнымалысына (индексіне) тәуелсіздігін бейнелейді.

Дирихле жеткілікті шарты. *E жиынында* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *функциялық қатары берілсін. Егер сол жиында анықталған қайсыбір* $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *және* $\{b_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *функциялық тізбектері үшін*

а) n нөмірі мен әр $x \in E$ *нүктесі үшін* $f_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)$ *теңдігі орындалса,*

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ *қатарының* $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)$ *дербес қосындыларынан құрылған функциялық тізбек E жиынында бірқалыпты шенелген болса,*

c) әр $x \in E$ *үшін* $b_0(x) \ge b_1(x) \ge \ldots b_n(x) \ge \ldots$ *болса,*

d) $\{b_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *функциялық тізбегі E жиынында* $b(x) \equiv 0$ *функциясына бірқалыпты жинақталса,*

онда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ *функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.*

Абель жеткілікті шарты. *E жиынында* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *функциялық қатары берілсін. Егер сол жиынында анықталған қайсыбір* $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *және* $\{b_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *функциялық тізбектірі үшін:*

а) әр n нөмірі мен әр $x \in E$ *нүктесі үшін* $f_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)$ *теңдігі орындалса,*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақталса,*

c) әр $x \in E$ *үшін* $\{b_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *сандық тізбегі монотонды болса,*

d) $\{b_n(x)\}_{n=0}^{\infty} - E$ *жиынында бірқалыпты шенелген тізбек болса,*

онда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\ b_n(x)$$

функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Бірқалыпты жинақталу мен үзіліссіздік.

Теорема. *E аралығында анықталған* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатары берілсін. Егер бұл қатардың әр* $f_n(x)$ *мүшелік функциясы осы аралықта үзіліссіз болып, қатарлардың өзі бірқалыпты жинақталса, онда* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатарының* $f(x)$ *шектік функциясы E аралығында үзіліссіз болады.*

Дини теоремасы. $[a,b]$ *сегментінде анықталған және сонда* $f(x)$ *функциясына нүктелі жинақталатын* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *функциялық қатары берілсін. Егер де* $f(x)$ *функциясы мен әр* $n(n = 1,2,...)$ *үшін* $f_n(x)$ *функциялары* $[a,b]$ *сегментінде үзіліссіз болып, әр* $n(n = 1,2,...)$ *мен* $x \in [a,b]$ *үшін* $f_n(x) \geq 0$ *теңсіздігі орындалса, онда* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатары* $[a,b]$ *сегментінде бірқалыпты жинақталады.*

Бірқалыпты жинақталатын функциялық қатарда шек пен қатар таңбасының ауыстырымдылығы.

Теорема. *E сандық жиынында* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *функциялық қатары беріліп, а сол жиынның шектік нүктесі болсын. Егер:*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатары E жиынында* $f(x)$ *функциясына бірқалыпты жинақталса,*

2) әр n нөмірі үшін нақты мәнді $\lim_{x \to a} f_n(x) = c_n$ *шегі бар болса,*

3) сол шектерден құрылған $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *сандық қатары жинақталып, қосындысы с нақты саны болса,*

онда $f(x)$ *функциясының* $x \to a$ *болғанда нақты мәнді шегі бар болып,* $\lim_{x \to a} f(x) = c$ *теңдігі орындалады.*

Үзіліссіз функциялардан құрылған функциялық қатарды мүшелеп интегралдау.

Теорема. $[a,b]$ *сегментінде үзіліссіз болатын* $f_n(x)(n=1,2,...)$ *функцияларынан құрылған* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатары сол жиында f(x) функциясына бірқалыпты жинақталсын. Онда f(x) функциясы* $[a,b]$ *сегментінде интегралданып,*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

теңдігі орындалады.

Интегралданатын функциялардан құрылған функциялық қатарды мүшелеп интегралдау.

Теорема. $[a,b]$ *сегментінде интегралданатын* $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ *функцияларынан құрылған* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатары сол жиында f(x) функциясына бірқалыпты жинақталсын. Онда f(x) функциясы* $[a,b]$ *интегралданып,* $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ *теңдігі орындалады.*

Нүктелі жинақталатын функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау.

Теорема. $[a,b]$ *сегментінде* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *функциялық қатары берілсін. Егер*

1) әр n(n=1,2,...) үшін $f_n(x)$ *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде үзіліссіз дифференциалданса, яғни әр* $x \in [a,b]$ *үшін* $f_n'(x)$ *ақырлы туындысы бар болып,* $f_n'(x)$ *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде үзіліссіз болса,*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *функциялық қатары* $[a,b]$ *сегментінде f(x) функциясына нүктелі жинақталса,*

3) туындылардан құрылған $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *қатары* $[a,b]$ *сегментінде бірқалыпты жинақталса,*
онда f(x) функциясы $[a,b]$ *сегментінде дифференциалданып,* $x \in [a,b]$ *үшін*

$$f'(x) = \overset{H}{\sum_{n=1}^{\infty}} f_n'(x) \qquad (1)$$

теңдігі орындалады.

Кемінде бір нүктеде жинақталатын функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау.

Теорема. $[a,b]$ *сегментінде* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *функциялық қатары берілсін. Егер*

1)әр n (n=1,2,...) үшін $f_n(x)$ *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде дифференциалданса,*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатары* $[a,b]$ *сегментінің кемінде бір нүктесінде, мәселен, x=a нүктесінде жинақталса,*

3) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *функциялық қатары* $[a,b]$ *сегментінде бірқалыпты жинақталса,*

онда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *қатары* $[a,b]$ *сегментінде бірқалыпты жинақталады,*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде дифференциалданып, әр* $x \in [a,b]$ *үшін (1) теңдігі орындалады.*

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
2. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.