Дәріс 8

ТЕРІС ЕМЕС МҮШЕЛІ САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

Дәріс құрылымы

1. Теріс емес мүшелі қатардың жинақталуы

2. Жинақталудың интегралдық критерийі

3. Салыстыру теоремасы

4. Коши белгісі және мысалдар

5. Даламбер және Раабе белгілері

6. Дербес қосындылар мен қалдықтар туралы теоремалар

Теріс емес мүшелі сандық қатар

Барлық n үшін $a_n \geq 0$ болатын

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum a_n$$

қатары жинақталуы үшін оның дербес қосындыларының жоғарыдан шенелуі қажетті де жеткілікті.

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad S_n \leq M$$

Мұнда S_n тізбегі кемімейді, өйткені $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$.

Жинақталатын қатардың қосындысы

Теріс емес мүшелі жинақталатын қатар үшін

$$S = \lim S_n = \sup S_n < +\infty$$

Сондықтан қатардың жинақталуын кейде мына теңсіздікпен белгілейді:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots < +\infty$$

Жинақталудың интегралдық критерийі

Теорема. $f(x)$ функциясы $[1,+\infty)$ аралығында үзіліссіз, теріс емес және өспейтін болсын.

Онда $\sum f(n)$ қатары жинақталуы үшін

$$A_{\mathrm{n}} = \int_1^{\mathrm{n}} f(x)\,dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

тізбегінің шенелуі қажетті де жеткілікті.

Басқаша айтқанда, қатар мен сәйкес меншіксіз интеграл бірдей жинақталады немесе жинақталмайды.

Интегралдық критерийдің салдарлары

1-салдар. Дәрежелік қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\alpha > 1$ болғанда жинақталады, $\alpha \leq 1$ болғанда жинақталмайды.

2-салдар. Логарифмдік қатар

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[n(\ln n)^{\alpha}]}$$

$\alpha > 1$ болғанда жинақталады, $\alpha \leq 1$ болғанда жинақталмайды.

Салыстыру теоремасы

Белгілі бір m_0 нөмірінен бастап барлық $n \geq m_0$ үшін

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

a) Егер $\sum b_n$ қатары жинақталса, онда $\sum a_n$ қатары да жинақталады.
b) Егер $\sum a_n$ қатары жинақталмаса, онда $\sum b_n$ қатары да жинақталмайды.

Коши белгісі

Теріс емес мүшелі $\sum a_n$ қатары үшін мына шек бар болсын:

Коши белгісі

Теріс емес мүшелі $\sum a_n$ қатары үшін мына шек бар болсын:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

a) $\alpha < 1$ болса, қатар жинақталады.

b) $\alpha > 1$ болса, қатар жинақталмайды.

c) $\alpha = 1$ болса, белгі қорытынды бермейді.

$\alpha = 1$ кезінде жинақталатын да, жинақталмайтын да қатарлар бар.

Коши белгісін қолдану

1-мысал. Мына қатарды қарастырайық:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

Коши белгісі бойынша

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} = 0 < 1$$

Демек, берілген қатар жинақталады.

Коши белгісінің жалпы түрі

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

Жұп және тақ нөмірлі мүшелер үшін

$$a_{k-1}^2=\frac{1}{2^{\mathrm{k}}},\qquad a_k^2=\frac{1}{3^{\mathrm{k}}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[2\mathrm{k}]{a_k^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[(2\mathrm{k}-1)]{a_{k-1}^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Жай шек жоқ. Бірақ $\limsup \sqrt[\mathrm{n}]{a}_{\mathrm{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ болғандықтан, қатар жинақталады.

Даламбер белгісі

Оң мүшелі $\sum a_{\mathrm{n}}$ қатары берілсін.

a) Егер $0 < q < 1$ саны мен m нөмірі табылып, $n \geq m$ үшін

$$\frac{a_{n+1}}{a_{\mathrm{n}}} \leq q$$

болса, қатар жинақталады.

b) Егер белгілі бір m нөмірінен бастап

$$\frac{a_{n+1}}{a_{\mathrm{n}}} \geq 1$$

болса, қатар жинақталмайды.

Даламбер белгісінің шектік түрі

Оң мүшелі қатар үшін мына шек бар болсын:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{\mathrm{n}}}$$

$\alpha < 1$ болса, қатар жинақталады.

$\alpha > 1$ болса, қатар жинақталмайды.

$\alpha = 1$ болса, қатар жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін.

Раабе белгісі

Оң мүшелі $\sum a_{\mathrm{n}}$ қатары үшін Раабе тізбегі:

$$R_{\mathrm{n}} = n\left(\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n+1}} - 1}\right)$$

a) Егер $t > 1$ саны мен m нөмірі табылып, барлық $n \geq m$ үшін $R_{\mathrm{n}} \geq t$ болса, онда қатар жинақталады.

b) Егер белгілі бір m нөмірінен бастап барлық $n \geq m$ үшін $R_{\mathrm{n}} \leq 1$ болса, онда қатар жинақталмайды.

Дербес қосындылар туралы теорема

1-теорема. Оң мүшелі $\sum a_{\mathrm{n}}$ қатары жинақталмасын:

$$S_{\mathrm{n}} = \sum_{k=1}^{n} a_k \to +\infty$$

Онда төмендегі қатар жинақталмайды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

Ал кез келген $\delta > 0$ үшін мына қатар жинақталады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}}$$

Қалдықтар туралы теорема

2-теорема. Оң мүшелі $\sum a_{\mathrm{n}}$ қатары жинақталсын:

$$r_{\mathrm{n}} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \rightarrow 0$$

Онда төмендегі қатар жинақталмайды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$$

Ал кез келген $0 < \delta < 1$ үшін мына қатар жинақталады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^{1-\delta}}$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. Алматы: Мектеп, 1987. 288 бет.

2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.

3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I, Т. II. Астана, электронды басылым, 2023. 2000 бет.