10-дәріс

ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР МЕН ҚАТАРЛАР. НҮКТЕЛІ ЖӘНЕ БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ

$E \subset R^1$ нақты сандар жиыны берілсін. Егер әр n оң бүтін санына E жиынында берілген $f_n(x)$ функциясы сәйкес қойылса, онда осы сәйкестік *E жиынында анықталған функциялық тізбек* деп аталады

Функциялық тізбектер үшін сандық тізбектер белгілеулеріне ұқсас $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots (x \in E)$ не қысқаша $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}(x \in E)$, $\{f_n(x)\}(x \in E)$ белгілеулері қолданылады.

E жиынында $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі берілсін. Әр $x_0 \in E$ үшін $f_n(x_0)$ мәндері бойынша $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегі анықталады. Егер де әр $x_0 \in E$ үшін оған сәйкес анықталған $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегінің нақты мәнді шегі бар болса, онда $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегін *E жиынында нүктелі жинақталады* дейді. Нүктелі жинақталатын тізбек E жиынында $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ сәйкестігі бойынша жаңа функция анықтайды. Сол функцияны *шектік функция* не *нүктелі шек* деп атайды. Сөйтіп, функция берілуінің тағы бір әдісімен таныстық: функциялық тізбектің нүктелі шегі ретінде анықталды.

E нақты сандар жиынында $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі берілсін.

$$f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)(x \in E) \qquad (2)$$

символы *функциялық қатар* деп аталады. Егер $S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)(x \in E; n = 1,2,\ldots)$ функциялық тізбегі E жиынында нүктелі жинақталса, онда (2) қатары *E жиынында нүктелі жинақталады,* ал E жиынында анықталған $f : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ функциясын (2) *қатарының шектік функциясы, нүктелі қосындысы* не *нүктелі шегі* деп атайды.

E нақты сандар жиынында $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі мен $f(x)$ функциясы берілсін. Егер әр ε оң саны мен әр $x \in E$ нүктесі (нақты саны) үшін $n \geq K(\varepsilon, x)$ болған сайын $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $K(\varepsilon, x)$ оң саны табылса, онда $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбегі *E жиынында f(x) функциясына нүктелі жинақталады* дейді де, $f_n(x) \overset{H}{\to} f(x)(x \in E)$ деп белгілейді. Кванторлар тілінде бұл анықтама былай жазылады:

$$f_n(x) \overset{H}{\to} f(x)\ (x \in E) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \forall x \in E\ \ \exists K(\varepsilon, x) > 0 : \forall n \geq K(\varepsilon, x) \Rightarrow \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Мәселен,

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{егер } 0<x\le\dfrac{1}{n}\ \ (n=1,2,...)\ \text{ болса},\\ 0, & x=0 \text{ не } \dfrac{1}{n}<x\le 1 \quad \text{болса}\end{cases} \tag{2}$$

функциялық тізбегін қарастырайық. Егер x=0 болса, онда оған сәйкес $f_n(0)=0\ \ (n=1,2,...)$ тізбегі үшін $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$,ал $0<x\le 1$ болғанда $n>\dfrac{1}{x}$ үшін $f_n(x)=0$ болып, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0.$ Сонымен, $0\le x\le 1$ үшін шектік $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ функциясы нөлге тепе-тең.

Енді осы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбек үшін $K(\varepsilon,x)$ өзгеру тәртібіне көңіл бөлейік. $0<\varepsilon<1$ саны берілсін. Онда $x\in(0,1)$ нүктесіне (индексіне) сәйкес $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегі үшін $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ теңсіздігі $n>\dfrac{1}{x}=K(\varepsilon,x)$ болғанда ғана орындалады, өйткені $f_n(x) \overset{f_n(x)\ge 0}{=} |f_n(x)| \overset{f(x)=0}{=} |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow f_n(x)<\varepsilon<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}<x\le 1 \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{x}.$

Басқаша айтқанда, x индексі неғұрлым нөлге жақын болса, оған сәйкес $a_n=f_n(x)\ \ (n=1,2,...)$ сандық тізбегі үшін $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ теңсіздігі соғұрлым үлкен болатын $K(\varepsilon,x)=\dfrac{1}{x}$ оң санынан ғана бастап орындалады. Ал $\lim\limits_{x\to+0} K(\varepsilon,x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ болғандықтан, барлық $x\in E=[0,1]$ үшін $n\ge K$ болғанда $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ болатындай бір x айнымалысына тәуелсіз K оң саны расында да жоқ. Бұның себебі, әрине, E жиыны ақырсыз болуында. Әр $x\in(0,1)$ үшін $K(\varepsilon,x)=\dfrac{1}{x}$ ақырлы болғанмен, $(0,1)$ ақырсыз жиын болғандықтан бұл жағдайда

$$\sup_{x\in(0,1)} K(\varepsilon,x)=+\infty.$$

Функциялық тізбектің бірқалыпты жинақталуының анықтамасы. E жиынында $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі мен $f(x)$ функциясы берілсін. Егер әр ε оң саны бойынша барлық $n\ge K(\varepsilon)$ және барлық $x\in E$ үшін $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай ($x\in E$ айнымалысына тәуелсіз) $K(\varepsilon)$ оң саны табылса, онда $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *функциялық тізбегі E жиынында* $f(x)$ *функциясына бірқалыпты жинақталады* дейді де, $f_n(x)\to f(x)\ (x\in E)$ деп белгілейді. Кванторлар тілінде бұл былай жазылады:

$$f_n(x)\overset{E}{\to} f(x)\ (x\in E) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists K(\varepsilon)>0:\forall n\ge K(\varepsilon),\forall x\in E:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{4}$$

Функциялық тізбек пен қатардың жиында бірқалыпты жинақталуының Коши критерийлері: *E жиынында анықталған $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі сол жиында бірқалыпты жинақталуы үшін (қандай функция екендігі айтылмайды, әйтеуір сондай функция бар) әр $\varepsilon > 0$ саны бойынша барлық $m,n \geq K(\varepsilon)$ және барлық $x \in E$ үшін $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $K(\varepsilon)$ оң саны табылуы қажетті де жеткілікті.*

Салдар. *E жиынында анықталған $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі сол жиында бірқалыпты жинақталмауы үшін қайсыбір ε оң саны мен кез келген K оң саны үшін $|f_{n(K)}(x(K)) - f_{m(K)}(x(K))| \geq \varepsilon.$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x(K) \in E$ нүктесі мен $n(K) \geq K$, $m(K) \geq K$ нөмірлері табылуы қажетті де жеткілікті.*

Функциялық қатар жинақталуының Коши критерийі. *E сандар жиынында анықталған $f_1(x) + ... + f_n(x) + ...$ функциялық қатар сол жиында бірқалыпты жинақталуы үшін әр ε оң саны бойынша барлық $K(\varepsilon) \leq p \leq q$ теңсіздігін қанағаттандыратын p және q бүтін сандары мен барлық $x \in E$ үшін $|f_p(x) + ... + f_q(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $K(\varepsilon)$ оң бүтін саны табылуы қажетті де жеткілікті.*

Нүктелі және бірқалыпты жинақталу ұғымдарының арақатынасы.

Т е о р е м а. *Бірқалыпты жинақталатын функциялық тізбек те, қатар да әрқашанда нүктелі жинақталады. Нүктелі жинақталатын тізбек те, қатар да бірқалыпты жинақталмауы мүмкін.*

Салдар. *Егер $\{f_n(x)\}$ $(x \in E)$ функциялық тізбегі бірқалыпты жинақталса, онда ол өзінің нүктелі шегі болатын функцияға бірқалыпты жинақталады.*

Нүктелі жинақтылығы алдын-ала белгілі функциялық тізбектің бірқалыпты жинақталу критерийі. *E жиынында анықталған $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялық тізбегі сол жиында $f(x)$ функциясына нүктелі жинақталсын да, соған байланысты $M_n \equiv \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$ белгілеуін қабылдайық. Онда $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі E жиынында бірқалыпты жинақталуы үшін $M_n \to 0$ $(n \to \infty)$ болуы қажетті де жеткілікті.*

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.